## 7.1. Mehrfachintegrale I

**(a)**

$$\begin{aligned}\int_1^3\int_0^1(\sqrt{y}+x-3xy^2)\,dx\,dy &= \int_1^3 \sqrt{y}x+\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}x^2y^2\Big|_0^1\,dy\\ &= \int_1^3\left(\sqrt{y}+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}y^2\right)\,dy\\ &= \left(\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}+\frac{y}{2}-\frac{y^3}{2}\right)_1^3\\ &= 2\sqrt{3}-\frac{38}{3}\,.\end{aligned}$$

**(b)** Wir berechnen mit Fubini

$$\begin{aligned}\int_0^\pi\int_0^\pi \sin^2(x)\sin^2(y)\,dx\,dy &= \int_0^\pi \sin^2(y)\left(\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx\right)\,dy\\ &= \int_0^\pi \sin^2(y)\,dy\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx\\ &= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\\ &= \frac{\pi^2}{4}\,.\end{aligned}$$

**(c)** Wir berechnen mit Fubini

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1(e^x+e^y)\,dy\,dx &= \int_0^1 ye^x+e^y\Big|_0^1\,dx\\ &= \int_0^1\left(e^x+e-1\right)\,dx\\ &= \left(e^x+(e-1)x\right)_0^1\\ &= 2(e-1)\,.\end{aligned}$$

**(d)** Wir berechnen mit Fubini

$$\begin{aligned}\int_{[0,\pi]^3}\sin(x+y+z)\,dx\,dy\,dz &= \int_0^\pi\int_0^\pi\int_0^\pi \sin(x+y+z)dx\,dy\,dz\\ &= \int_0^\pi\int_0^\pi 2\cos(y+z)\,dy\,dz\\ &= \int_0^\pi\int_0^\pi -4\sin(z)\,dz = -8\end{aligned}$$

## 7.2. Fubini

**(a)** Wir berechnen das innere Integral nach $x$ und verwenden dazu die Substitution $u = x + y$

$$\int \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx = \int \left(\frac{1}{u^2} - \frac{2y}{u^3}\right)du = \left(-\frac{1}{u} + \frac{y}{u^2}\right) = -\frac{x}{(x+y)^2},$$

$$\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx = -\frac{x}{(x+y)^2}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{-1}{(y+1)^2}.$$

Integrieren wir weiter nach $y$ kriegen wir

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{-1}{(y+1)^2}\,dy = \frac{1}{y+1}\Big|_{y=0}^{y=1} = -\frac{1}{2}.$$

Umgekehrt haben wir mit analogen Rechnungen

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}.$$

**(b)** Würde $\int_0^1(\int_0^1 \left|\frac{x-y}{(x+y)^3}\right| dx)dy$ existieren (d.h. wäre es endlich), dann könnten wir den Satz von Fubini anwenden. Das würde aber im Widerspruch stehen zu dem, was wir in a) berechnet haben. Somit wissen wir, dass das Integral mit dem Absolutbetrag nicht existiert.

Tatsächlich: $F(y) = int_0^1|(x-y)/(x+y)^3|dx = 1/(2y) + -1/(1+y)^2$ und $int_0^1 F(y)dy = \infty$.

## 7.3. Mehrfachintegral II

**(a)** Um das Maximum von $y$ zu finden, lösen wir das System

$$\begin{cases} x^2 y = 1 \\ y = ax \end{cases}$$

und erhalten $x = a^{-\frac{1}{3}}$ und $y = a^{\frac{2}{3}}$. Daher folgt $0 < y < a^{\frac{2}{3}}$.

Wir definieren die zwei stetigen Funktionen $\phi(y) = \frac{y}{a}$, $0 < y < a^{\frac{2}{3}}$ und

$$\psi(y) = \begin{cases} \frac{y}{b}\,, & 0 < y \le b^{\frac{2}{3}} \\ y^{-\frac{1}{2}}\,, & b^{\frac{2}{3}} < y < a^{\frac{2}{3}}\,. \end{cases}$$

Somit bekommen wir $\phi(y) < x < \psi(y)$, d.h.

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < a^{\frac{2}{3}}, \phi(y) < x < \psi(y)\right\}\,.$$

**(b)** Wir berechnen das Doppelintegral

$$\int_E xy\,dxdy\,.$$

Wir verwenden dazu die vorhergehende Teilaufgabe und schreiben

$$\begin{aligned}
\int_E xy\,dxdy &= \int_0^{b^{\frac{2}{3}}} \left( \int_{\frac{y}{a}}^{\frac{y}{b}} xy\,dx \right) dy + \int_{b^{\frac{2}{3}}}^{a^{\frac{2}{3}}} \left( \int_{\frac{y}{a}}^{y^{-\frac{1}{2}}} xy\,dx \right) dy \\
&= \int_0^{b^{\frac{2}{3}}} \frac{1}{2} x^2 y \Big|_{x=\frac{y}{a}}^{x=\frac{y}{b}} dy + \int_{b^{\frac{2}{3}}}^{a^{\frac{2}{3}}} x^2 y \Big|_{x=\frac{y}{a}}^{x=y^{-\frac{1}{2}}} dy \\
&= \int_0^{b^{\frac{2}{3}}} \frac{1}{2} y^3 \left( \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) dy + \int_{b^{\frac{2}{3}}}^{a^{\frac{2}{3}}} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{y^3}{a^2}\,dy \\
&= \frac{1}{8} y^4 \left( \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) \Big|_0^{b^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{2} \left( a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}} \right) - \frac{1}{8} \frac{y^4}{a^2} \Big|_{b^{\frac{2}{3}}}^{a^{\frac{2}{3}}} \\
&= \frac{3}{8} (a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}}).
\end{aligned}$$

*Alternative mit $y$-einfachem Bereich:* Dazu berechnen wir die Schnittpunkte $P_1\,, P_2$

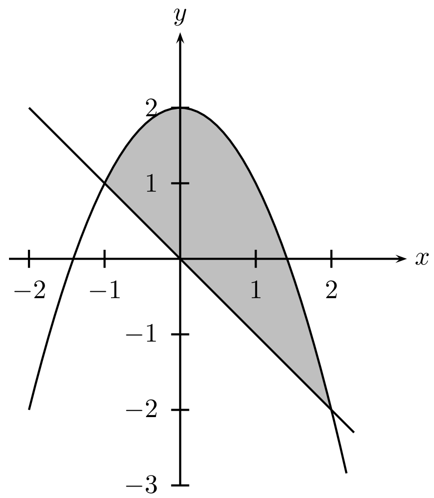
$$P_1 = \left( a^{-\frac{1}{3}}, a^{\frac{2}{3}} \right) \quad \text{und} \quad P_2 = \left( b^{-\frac{1}{3}}, b^{\frac{2}{3}} \right)\,.$$

Der $y$-einfache Bereich lässt sich analog wie in a) schreiben und damit folgt

$$\begin{aligned}
\int_E xy\,dxy &= \int_0^{a^{-\frac{1}{3}}} \left( \int_{bx}^{ax} xy\,dy \right) dx + \int_{a^{-\frac{1}{3}}}^{b^{-\frac{1}{3}}} \left( \int_{bx}^{\frac{1}{x^2}} xy\,dy \right) dx \\
&= \int_0^{a^{-\frac{1}{3}}} \frac{1}{2} (a^2 - b^2) x^3\,dx + \int_{a^{-\frac{1}{3}}}^{b^{-\frac{1}{3}}} \frac{x}{2} \left( \frac{1}{x^4} - (bx)^2 \right) dx \\
&= \frac{1}{8} \left( a^{\frac{2}{3}} - \frac{b^2}{a^{\frac{4}{3}}} \right) + \frac{2a^2 - 3a^{\frac{4}{3}} b^{\frac{2}{3}} + b^2}{8a^{\frac{4}{3}}} \\
&= \frac{3}{8} \left( a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}} \right)\,.
\end{aligned}$$

### 7.4. Mehrfachintegrale III

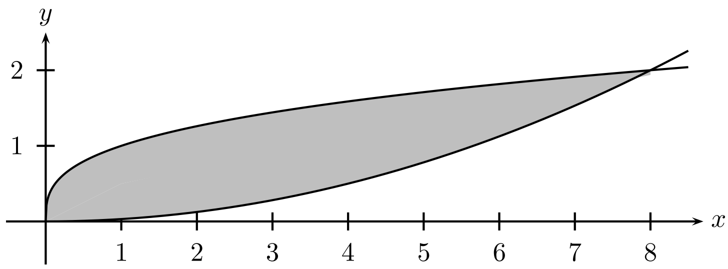
**(a)** Das Gebiet worüber integriert wird, sieht folgendermassen aus:




Daraus folgt:

$$\int_{-1}^{2}\left(\int_{-x}^{2-x^2} f(x,y)\,dy\right)\,dx$$
$$= \int_{-2}^{1}\left(\int_{-y}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\,dx\right)\,dy + \int_{1}^{2}\left(\int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\,dx\right)\,dy$$

**(b)** Das Gebiet sieht hier folgendermassen aus:




Und darum ergibt die Umkehrung der Integrationsreihenfolge:

$$\int_{0}^{2}\left(\int_{y^3}^{4\sqrt{2y}} f(x,y)\,dx\right)\,dy = \int_{0}^{8}\left(\int_{\frac{x^2}{32}}^{x^{\frac{1}{3}}} f(x,y)\,dy\right)\,dx$$

### 7.5. Rotationskörper

**(a)** Wir nutzen Zylinderkoordinaten, um $K$ zu beschreiben. Zylinderkoordinaten sind gegeben durch:

$$\Phi\colon (r,\varphi,z) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix},$$

mit Jacobimatrix

$$D\Phi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Jacobideterminante ist damit $\det D\Phi = r$. Die Grenzen von $r$, $\varphi$ und $z$ sind gegeben durch $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le z \le z_0$ und $0 \le r \le \sqrt{z}$ und damit ist das Volumen von $K$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(K) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{z_0}\int_0^{\sqrt{z}} r\, dr dz d\varphi = 2\pi \int_0^{z_0} \left[\frac{1}{2}r^2\right]_{r=0}^{r=\sqrt{z}} dz \\ &= \pi \int_0^{z_0} z\, dz = \frac{\pi}{2} z_0^2. \end{aligned}$$

**(b)** Für einen allgemeinen Rotationskörper wiederholen wir das obige Vorgehen. Die Grenzen sind jetzt $0 \le \varphi \le 2\pi$, $a \le z \le b$ und $0 \le r \le f(z)$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(K) &= \int_0^{2\pi}\int_a^{b}\int_0^{f(z)} r\, dr dz d\varphi = 2\pi \int_a^{b} \left[\frac{1}{2}r^2\right]_{r=0}^{r=f(z)} dz \\ &= \pi \int_a^b f(z)^2\, dz \end{aligned}$$

### 7.6. Schwerpunkt

**(a)** Wir berechnen das Volumen von $\Delta^3$ mit dem Satz von Fubini als iteriertes Integral:

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(\Delta^3) &= \int_{\Delta^3} dxdydz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x}\left(\int_0^{1-x-y} dz\right) dy\right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1-x-y)\, dy\right) dx \\ &= \int_0^1 \left[(1-x)y - \frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x)^2\, dx = \left[\frac{1}{6}(x-1)^3\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Wir berechnen als nächstes $s_x$. Hierfür verwenden wir wiederum Fubini und integrieren zunächst in $z$ und $y$ Richtung und zuletzt in $x$ Richtung:

$$\begin{aligned}
s_x &:= \frac{1}{\mathrm{vol}(\Delta^3)} \int_{\Delta^3} x \, dxdydz = 6 \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} \left( \int_0^{1-x-y} x \, dz \right) dy \right) dx \\
&= 6 \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} (1-x-y) x \, dy \right) dx \\
&= 6 \int_0^1 \left[ (y(1-x) - \frac{1}{2} y^2) x \right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\
&= 3 \int_0^1 (1-x)^2 x \, dx \\
&= \int_0^1 3x - 6x^2 + 3x^3 \, dx \\
&= \left[ \frac{3}{2} x^2 - 2x^3 + \frac{3}{4} x^4 \right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{3}{2} - 2 + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Man sieht leicht, dass die Integrale für $s_y$ und $s_z$ auf die gleichen iterierten Integrale führen. Für $s_y$ gilt beispielsweise

$$s_y := \frac{1}{\mathrm{vol}(\Delta^3)} \int_{\Delta^3} y \, dxdydz = 6 \int_0^1 \left( \int_0^{1-y} \left( \int_0^{1-x-y} y \, dz \right) dx \right) dy.$$

Dies ist das gleiche Integral wie oben (wenn wir die $x$ und $y$ Variablen entsprechend umbenennen). Die Rechnung von oben zeigt nun $s_y = \frac{1}{4}$ und analog erhält man auch $s_z = \frac{1}{4}$. Folglich gilt

$$S_{\Delta^3} = \left( \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right).$$

**(b)** Die Jacobimatrix von $\Phi$ ist

$$D\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -v & 1-u & 0 \\ -w(1-v) & -w(1-u) & (1-u)(1-v) \end{pmatrix}.$$

Da $D\Phi$ eine Dreiecksmatrix ist, können wir ihre Determinante einfach ablesen:

$$\det D\Phi = (1-u)^2(1-v).$$

Für das Volumen kriegen wir dann:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(\Delta^3) &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (1-u)^2 (1-v) \, dwdvdu \\
&= \left[ -\frac{1}{3}(1-u)^3 \right]_{u=0}^{u=1} \left[ -\frac{1}{2}(1-v)^2 \right]_{v=0}^{v=1} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Die einzelnen Koordinaten des Schwerpunktes ergeben sich dann (mit $x = u$, $y = v(1-u)$ und $z = w(1-u)(1-v)$) als

$$\begin{aligned}
s_x &= 6 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 u(1-u)^2(1-v)\, dudvdw \\
&= 6 \left( \int_0^1 (u - 2u^2 + u^3)\, du \right) \left[ -\frac{1}{2}(1-v)^2 \right]_{v=0}^{v=1} = \frac{1}{4}, \\
s_y &= 6 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 v(1-v)(1-u)^2(1-v)\, dudvdw = \frac{1}{4}, \\
s_z &= 6 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 w(1-u)(1-v)(1-u)^2(1-v)\, dudvdw = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$