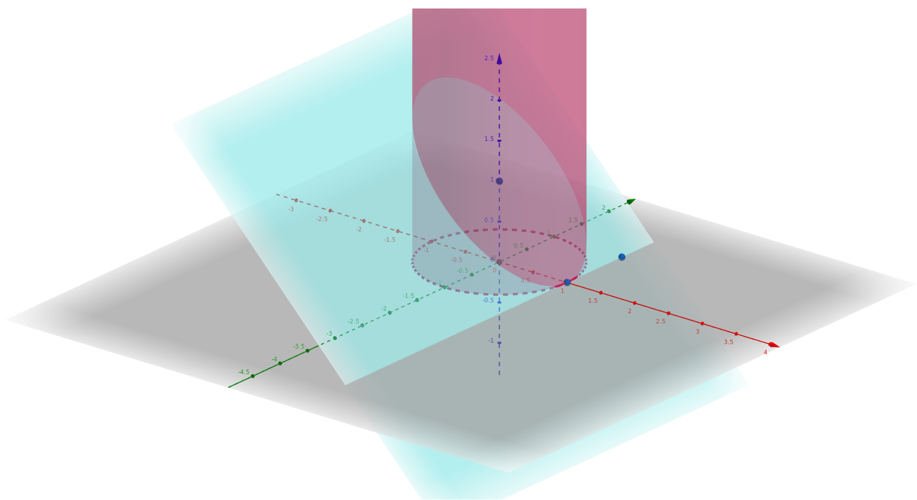
8.1. Das Volumen

Zuerst veranschaulichen wir uns die Situation:



Hierbei sehen wir, dass sich Zylinderkoordinaten mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ z \end{pmatrix}$$

anbieten. Die Jacobideterminante dieser Transformation ist r. (Beachte, dass Zylinderkoordinaten diesbezüglich Polarkoordinaten entsprechen.)

Wichtig ist auch, zu sehen, dass für alle (x, y) mit $x^2 + y^2 \leq 1$ gilt, dass die Ebene $x + z = 1$ über der Ebene $z = 0$ liegt. In den transformierten Koordinaten ist der Körper dann also gegeben durch

$$K = \{(r, \phi, z) \mid r \in [0, 1],\ \phi \in [0, 2\pi],\ 0 \leq z \leq 1 - r\cos\phi\}$$

wobei die Bedingung für z daher kommt, dass $0 \leq z \leq 1 - x$ und $x = r\cos\phi$.

Wir können das Integral deshalb folgendermassen aufschreiben:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1-r\cos\phi} r\,dzdrd\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r\cos\phi)r\,drd\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r-r^2\cos\phi)\,drd\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{3}\cos\phi\right)\Bigg|_0^1 d\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cos\phi\right)\,d\phi \\
&= \pi\,.
\end{aligned}
$$

8.2. Der Zykloidenbogen

Es ist die Länge $L(\gamma)$ der Kurve

$$
\begin{array}{ccccc}
\gamma & : & [0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\
 & & t & \mapsto & \begin{pmatrix} at-a\sin t \\ a-a\cos t \end{pmatrix}
\end{array}
$$

zu bestimmen. Diese ist gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
L(\gamma) &= \int_0^{2\pi}\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi}\sqrt{(a-a\cos t)^2+(a\sin t)^2}\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} a\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\ \mathrm{d}t \\
&= a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\ \mathrm{d}t \\
&= a\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\ \mathrm{d}t \ = \ a\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\ \mathrm{d}t \\
&= 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\ \mathrm{d}t \ = \ -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_{t=0}^{t=2\pi} \\
&= -4a\cdot(-1)+4a\cdot 1 \ = \ 8a\,.
\end{aligned}
$$

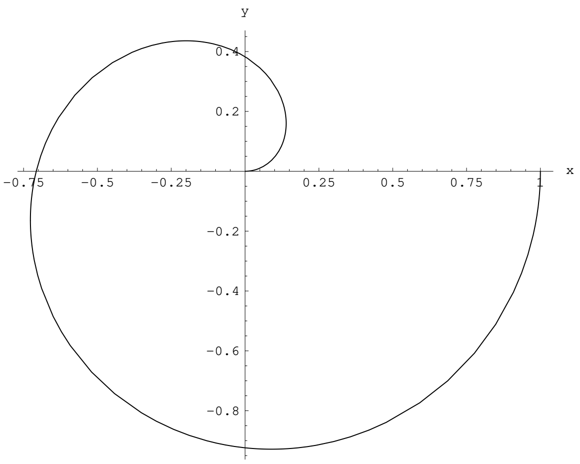
Die gesuchte Länge der Kurve γ ist also

$$L(\gamma) = 8a\,.$$

8.3. Variablentransformation

(a) Zur Berechnung eignen sich am besten Polarkoordinaten (ρ, φ) für B

$$B = \Big\{(\rho, \varphi) \;\Big|\; 0 \le \rho \le \sin\big(\tfrac{\varphi}{4}\big),\; 0 \le \varphi \le 2\pi\Big\},$$



und Zylinderkoordinaten um den Körper zu beschreiben, welcher aus dem Schnitt der Einheitskugel $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$ und des über B liegenden Gebiets $\{(x, y, z) \mid (x, y) \in B,\; z \ge 0\}$ besteht, zu beschreiben:

$$K = \Big\{(\rho, \varphi, z) \;\Big|\; (\rho, \varphi) \in B,\; 0 \le z \le \sqrt{1-\rho^2}\Big\}.$$

Dabei ist $0 \le z \le \sqrt{1 - x^2 - y^2} = \sqrt{1-\rho^2}$ von der Grenze der Einheitskugel. Das Volumen von K ist dann

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(K) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sin(\varphi/4)} \int_0^{\sqrt{1-\rho^2}} \rho \, dz \, d\rho \, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sin(\varphi/4)} \sqrt{1-\rho^2}\, \rho \, d\rho \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \Big[-\frac{1}{2}\frac{2}{3}\,(1-\rho^2)^{3/2}\Big]_0^{\sin(\varphi/4)} d\varphi \\
&= -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \Big(\cos^3\Big(\frac{\varphi}{4}\Big) - 1\Big)\, d\varphi = -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \Big(\frac{1}{4}\cos\Big(\frac{3\varphi}{4}\Big) + \frac{3}{4}\cos\Big(\frac{\varphi}{4}\Big) - 1\Big)\, d\varphi \\
&= -\frac{1}{3}\Big[\frac{1}{3}\sin\Big(\frac{3\varphi}{4}\Big) + 3\sin\Big(\frac{\varphi}{4}\Big) - \varphi\Big]_0^{2\pi} = -\frac{1}{3}\Big(-\frac{1}{3} + 3 - 2\pi\Big) = \frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9}.
\end{aligned}$$

(b) Die Randkurve besteht aus zwei Teilen: der Graden von $(0,0)$ nach $(1,0)$ und der Kurve $\gamma(\varphi) = \left(\sin\left(\frac{\varphi}{4}\right)\cos\varphi, \sin\left(\frac{\varphi}{4}\right)\sin\varphi\right)$ wie in der Aufgabenstellung angegeben. Die Länge der Geraden ist 1, für die Kurve $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ berechnen wir

$$\frac{d\gamma}{d\varphi} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\cos\left(\frac{\varphi}{4}\right)\cos\varphi - \sin\left(\frac{\varphi}{4}\right)\sin\varphi \\ \frac{1}{4}\cos\left(\frac{\varphi}{4}\right)\sin\varphi + \sin\left(\frac{\varphi}{4}\right)\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\left|\frac{d\gamma}{d\varphi}\right| = \frac{1}{16}\cos^2\left(\frac{\varphi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\varphi}{4}\right) = 1 - \frac{15}{16}\cos^2\left(\frac{\varphi}{4}\right)$$

und damit

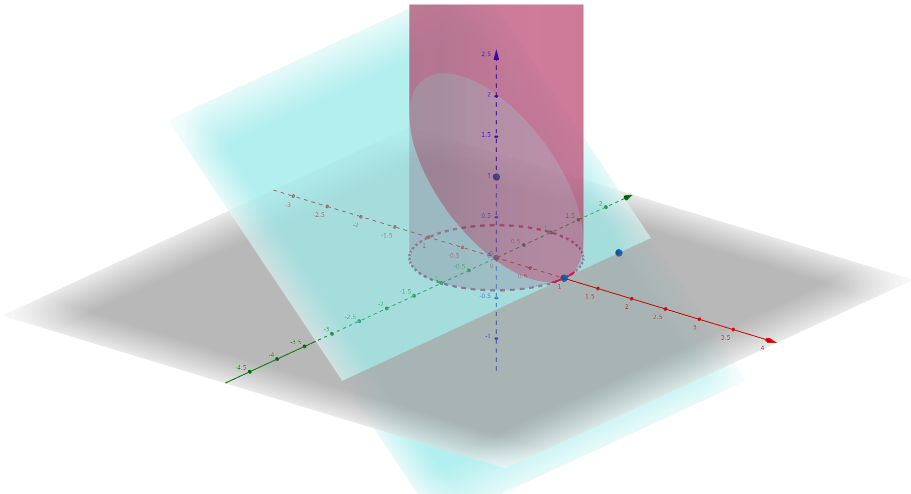
$$\int_\gamma 1\, d\sigma = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \frac{15}{16}\cos^2\left(\frac{\varphi}{4}\right)}\, d\varphi \approx 4.29,$$

also der Umfang einer Ellipse mit Ekzentrizität $\varepsilon = \sqrt{\frac{15}{16}}$.

Die Gesamtlänge ist dann ≈ 5.29.

8.4. Oberflächenintegral

(a) Wir betrachten nochmals die Skizze aus Aufgabe 8.1:



Wir sehen hier, dass die Oberfläche aus drei Teilen bestehen: dem Boden B, dem Deckel D und der Mantelfläche M.

Die Fläche des Bodens können wir mit bekannten Methoden direkt hinschreiben: $\mathrm{Vol}(B) = \pi$.

Für die Deckfläche nutzen wir die Parametrisierung

$$\Phi\colon (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1-x \end{pmatrix},$$

wobei $x^2+y^2 \leq 1$. Es ist dann

$$d\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

und die Gramsche Determinante ist

$$\det((d\Phi)^T d\Phi) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -2.$$

Damit ist das Volumen des Deckels:

$$\mathrm{Vol}(D) = \int_D 1\, do = \int_{\{x^2+y^2\leq 1\}} \sqrt{|\det((d\Phi)^T d\Phi)|}\, dxdy = \sqrt{2}\pi.$$

Für die Mantelfläche nutzen wir die Zylinderkoordinaten wie in Aufgabe 8.1 und setzen $r=1$. Dies ergibt

$$\Psi\colon (\phi,z) \mapsto \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ z \end{pmatrix},$$

wobei (ϕ,z) erfüllen, dass $\phi \in [0,2\pi]$ und $0 \leq z \leq 1-\cos\phi$. Es ist dann

$$d\Psi = \begin{pmatrix} -\sin\phi & 0 \\ \cos\phi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\det((d\Psi)^T d\Psi) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Damit ist das Volumen

$$\mathrm{Vol}(M) = \int_M 1\, do = \int_0^{2\pi}\int_0^{1-\cos\phi} 1\, dz d\phi = \int_0^{2\pi} (1-\cos\phi)\, d\phi = 2\pi.$$

Insgesamt kriegen wir also

$$\mathrm{Vol}(K) = \mathrm{Vol}(M) + \mathrm{Vol}(B) + \mathrm{Vol}(D) = (3+\sqrt{2})\pi.$$

(b) Um die Funktion $f(x, y, z) = x$ über die Oberfläche zu integrieren, teilen wir wiederum in die drei Teile M, B und D auf und integrieren jeweils einzeln, die Gramschen Determinaten nutzend, die wir in a) bereits berechnet haben.

Wegen Symmetrie (oder mit nachrechnen) ergibt sich

$$\int_B x\, do = \int_D x\, do = 0.$$

Für die Mantelfläche kriegen wir (mit $x = \cos\phi$):

$$\int_M x\, do = \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\cos\phi} \cos\phi\, dz d\phi = \int_0^{2\pi} (\cos\phi - \cos^2\phi)\, d\phi = -\pi.$$

8.5. Der Flächeninhalt

Ist $a < 0$, so liefert $|a|$ anstelle von a dasselbe Ergebnis, da die Fläche lediglich der Spiegelung $(x, y, z) \mapsto (-x, y, z)$ unterworfen wird. Wir können also der Einfachheit halber $a > 0$ annehmen. Die Hemisphäre vom Radius a parametrisieren wir in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{r}(r, \phi) = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ \sqrt{a^2 - r^2} \end{pmatrix} \qquad \text{für } 0 < r \leq a \text{ und } -\pi \leq \phi < \pi.$$

Das (skalare) Flächenelement dieser Parametrisierung lautet:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right| \mathrm{d}\mu(r, \phi) \\
&= \left| \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ -\frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\phi \\ r\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \right| \mathrm{d}\mu(r, \phi) \\
&= \left| \begin{pmatrix} \frac{r^2\cos\phi}{\sqrt{a^2 - r^2}} \\ \frac{r^2\sin\phi}{\sqrt{a^2 - r^2}} \\ r \end{pmatrix} \right| \mathrm{d}\mu(r, \phi) \\
&= \frac{ar}{\sqrt{a^2 - r^2}} \mathrm{d}\mu(r, \phi)\,.
\end{aligned}$$

Nun liegt $\mathbf{r}(r, \phi)$ im fraglichen Zylinder genau dann, wenn gilt:

$$\begin{aligned}
& \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 && \leq \frac{a^2}{4} \\
\iff \quad & x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2 && \leq \frac{a^2}{4} \\
\iff \quad & x^2 + y^2 && \leq ax \\
\iff \quad & r^2 && \leq ar\cos\phi \\
\iff \quad & r && \leq a\cos\phi\,.
\end{aligned}$$

Diese Bedingung kommt also zu den bereits genannten Bedingungen $0 < r \leq a$ und $-\pi \leq \phi < \pi$ hinzu. Sie kann aber nur gelten, wenn $\cos\phi \geq 0$ ist, d. h., wenn gilt $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$. Andererseits ist sowieso $a\cos\phi \leq a$. Der fragliche Bereich ist also beschrieben durch die beiden Ungleichungen $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ und $r \leq a\cos\phi$. Der gesuchte Flächeninhalt ist daher gleich

$$\begin{aligned}
\int_B \mathrm{d}\omega &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{a\cos\phi} \frac{ar}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\phi \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -a\sqrt{a^2 - r^2}\Big|_{r=0}^{a\cos\phi}\, \mathrm{d}\phi \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -a^2\left(\sqrt{1 - \cos^2\phi} - 1\right)\, \mathrm{d}\phi \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2\left(1 - |\sin\phi|\right)\, \mathrm{d}\phi \\
&= a^2(\pi - 2)\,.
\end{aligned}$$

8.6. Vertauschung von Ableitung und Integral

Wir berechnen $\dot{F}(0)$, wobei die Funktion $t \mapsto F(t)$ durch

$$F(t) := \int_{2t+1}^{t^2+2} \frac{e^{tx}\sqrt{1 + t^2 x}}{x\,(x+1)}\, dx$$

definiert ist. Nach der Leibnizschen Regel darf man zur Ermittlung der Ableitung $\dot{F}(t)$ unter dem Integralzeichen partiell nach t differenzieren. Für unsere Funktion F

bedeutet dies

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F(t) &= \frac{d}{dt}\int_{2t+1}^{t^2+2} \frac{e^{tx}\sqrt{1+t^2x}}{x\,(x+1)}\,dx \\
&= \int_{2t+1}^{t^2+2} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{tx}\sqrt{1+t^2x}}{x\,(x+1)}\right)\,dx + \frac{e^{t(t^2+2)}\sqrt{1+t^2(t^2+2)}}{(t^2+2)(t^2+3)}\frac{d}{dt}(t^2+2)+ \\
&\quad - \frac{e^{t(2t+1)}\sqrt{1+t^2(2t+1)}}{(2t+1)(2t+2)}\frac{d}{dt}(2t+1) \\
&= \int_{2t+1}^{t^2+2} \frac{x\,e^{tx}\sqrt{1+t^2x}\ +\ e^{tx}\frac{tx}{\sqrt{1+t^2x}}}{x\,(x+1)}\,dx + \frac{e^{t(t^2+2)}\sqrt{1+t^2(t^2+2)}}{(t^2+2)(t^2+3)}2t+ \\
&\quad - \frac{e^{t(2t+1)}\sqrt{1+t^2(2t+1)}}{(2t+1)(2t+2)}2
\end{aligned}
$$

Folglich erhalten wir für $t=0$, dass

$$
\frac{d}{dt}F(t)\bigg|_{t=0} = \int_1^2 \frac{x}{x\,(x+1)}\,dx - 1 = \int_1^2 \frac{1}{x+1}\,dx - 1 = \ln\frac{3}{2} - 1\,.
$$