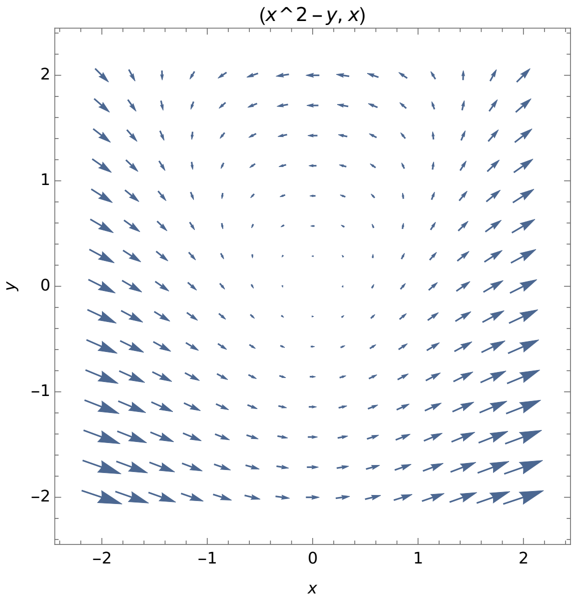
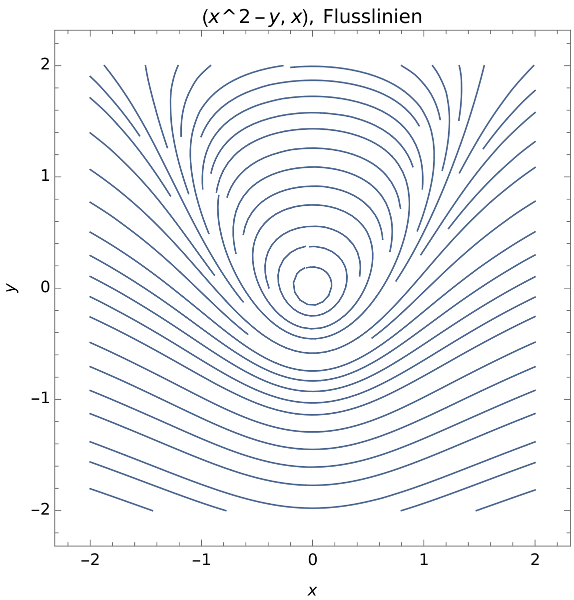
9.1. Vektorfeld

(a) Das Vektorfeld



(b) Einige Flusslinien sind in untenstehender Graphik eingezeichnet. Zu beachten ist, dass nicht alle Flusslinien vollständig sind, einige könnten noch verlängert werden.



(c) Es existiert kein Potential, das lässt sich folgendermassen zeigen: Wir nehmen an, $\Phi(x, y)$ sei das gesucht Potential. Dann muss gelten

$$\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x, y) = x^2 - y,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\Phi(x, y) = x.$$

Integration dieser beiden Bedingungen nach x respektive y ergibt

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - xy + C(y),$$
$$\Phi(x, y) = xy + B(x).$$

Der Vergleich zeigt sofort, dass dies nicht erfüllt sein kann.

(d) Die Existenz eines Potentials ist keine Voraussetzung, damit die Flusslinien wie in Teil b) existieren. Tatsächlich ist auch die Verwendung eine andere: Die Flusslinien betrachten, wo man landet, wenn man dem Fluss folgt, sie geben uns Kurven in der Ebene (die Lösungen der Differentialgleichung $\frac{d}{dt}(x, y) = K(x, y)$). Die Existenz eines Potentials sagt uns dagegen, dass die Arbeit, die verrichtet wird, wenn man von einem Punkt zum anderen geht, nicht vom Pfad abhängt, sondern nur von Anfangs- und Endpunkt.

Bemerkung: Wenn es geschlossene Flusslinien gibt, wie es hier der Fall ist, dann kann kein Potential existieren, denn betrachten wir die Arbeit entlang einer dieser geschlossenen Kurven (in Flussrichtung, einmal rundherum), dann ist diese zwingendermassen positiv. Bleiben wir dagegen stehen, so ist die Arbeit = 0. Das sind also zwei Pfade, entlang derer die Arbeit nicht gleich ist.

(e) Ein Richtungsfeld ist einer Differentialgleichung der Form $y'(x) = F(x, y)$ zugeordnet. Für einen Punkt (x, y) zeichnen wir den Einheitsvektor mit Steigung $F(x, y)$ ein (d.h. $(x, y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+F(x,y)^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ F(x, y) \end{pmatrix}$). Folgen wir nun diesem Vektorfeld, zeichnen wir damit den Graphen der Lösungen $y(x)$ der Differentialgleichung. (Diese Kurven sind auch wirklich immer Graphen, eine Situation wie in b), wo die Flusslinien Kreise bilden können wir hier nicht kriegen.)

Wenn wir ein beliebiges Vektorfeld haben, lösen wir das System von Differentialgleichung $\frac{d}{dt}(x(t), y(t)) = K(x(t), y(t))$. Wenn wir als spezielles Vektorfeld $K(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ F(x, y) \end{pmatrix}$ betrachten, dann ist die y-Koordinate der Lösungen dieses Systems dasselbe wie die Lösung der Differentialgleichung $y'(t) = F(t, y)$. In diesem Sinne ist das Zeichnen der Flusslinien in einem Richtungsfeld also fast ein Spezialfall von Flusslinien zu einem Vektorfeld, mit dem Unterschied, dass ein Richtungsfeld nach Konvention aus Einheitsvektoren besteht.

9.2. Masse

Wir betrachten die Menge

$$B' = \{(x, y) : 0 \le y \le 2, 0 \le x \le 2 - y\} \ .$$

Dann können wir B schreiben als

$$B = \{(x, y, z) : (x, y) \in B', 0 \le z \le 2 - x - y\} \ .$$

Das Integral über B ist

$$\begin{aligned}
m(B) &= \int_B y^2 dV \\
&= \int_0^2 \int_0^{2-y} \int_0^{2-x-y} y^2 \, dz dx dy \\
&= \int_0^2 \int_0^{2-y} y^2(2 - x - y) \, dx dy \\
&= \int_0^2 (2y^2(2 - y) - \frac{(2 - y)^2 y^2}{2} - y^3(2 - y)) \, dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^2 (4y^2 - 4y^3 + y^4) \, dy \\
&= \frac{8}{15} \, .
\end{aligned}$$

9.3. Linienintegrale I

(a) Wir parametrisieren γ durch $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (t, t^2), t \in [-1, 1] \Rightarrow \dot{\gamma}(t) = (1, 2t)$.
Dann ist das Integral des Vektorfelds $\lambda(x, y) = (x + y, x - y)$ entlang γ nach Definition

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \lambda &= \int_{-1}^1 \lambda(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) \, dt = \int_{-1}^1 (x(t) + y(t), x(t) - y(t)) \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} dt \\
&= \int_{-1}^1 (t + t^2) \cdot 1 + (t - t^2) \cdot 2t \, dt = \int_{-1}^1 (-2t^3 + 3t^2 + t) \, dt = 2
\end{aligned}$$

(b) $\lambda(x, y) = (0, xy^2)$ auf $\mathbb{R}^2$. Wir parametrisieren den Halbkreis durch (t=Polarwinkel)

$$\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (2 \cos t, 2 \sin t).$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \lambda = \int_0^\pi \lambda(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^\pi (0, 8 \sin^2 t \cos t) \begin{pmatrix} -2 \sin t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t = 16 \int_0^\pi \sin^2 t \cos^2 t \, \mathrm{d}t$$

Zum Berechnen des Integrals benutzen wir die Doppelwinkelformeln

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha), \qquad \cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha).$$

Also ist der Integrand

$$\sin^2(t)\cos^2(t) = \frac{1}{4}\sin^2(2t) = \frac{1}{8}(1-\cos(4t))$$

und das Integral wird

$$\int_\gamma \lambda = 2\int_0^\pi 1-\cos(4t)\mathrm{d}t = 2t - \tfrac{1}{2}\sin(4t)|_{t=0}^{t=\pi} = 2\pi$$

.

(c) Wir teilen den Weg in drei Teile auf (jeweils die Seiten des Dreiecks) und berechnen die einzelen Wegintegrale, die wir am Schluss dann addieren.
Von $(0,0) \to (1,0)$:
$\gamma_1(t) = \binom{t}{0}, \quad (0 \le t \le 1), \dot\gamma(t) = \binom{1}{0}$ und damit

$$\int_{\gamma_1} \lambda = \int_0^1 (t^2, t^2)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\mathrm{d}t = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}.$$

Von $(1,0) \to (0,1)$:
$\gamma_2(t) = \binom{1-t}{t}, \quad (0 \le t \le 1), \dot\gamma(t) = \binom{-1}{1}$ daher:

$$\int_{\gamma_2} \lambda = \int_0^1 ((1-t)^2 + t^2, (1-t)^2 - t^2)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} dt = \int_0^1 -2t^2 dt = -\frac{2}{3}.$$

Von $(0,1) \to (0,0)$:
$\gamma_3(t) = \binom{0}{1-t}, \quad (0 \le t \le 1) \quad \dot\gamma(t) = \binom{0}{-1}$ mit Integral

$$\int_{\gamma_3} \lambda = \int_0^1 \left((1-t)^2, -(1-t)^2\right)\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)^2\mathrm{d}t = \frac{1}{3}.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} \lambda = \int_{\gamma_1}\lambda + \int_{\gamma_2}\lambda + \int_{\gamma_3}\lambda = 0.$$

9.4. Linienintegrale II

Diese gesamte Aufgabe ist lediglich eine Umformulierung der vorherigen Aufgabe, die Lösung bleibt also gleich.

9.5. Linienintegrale III

Sei

$$\gamma :\ t \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^n \quad a \leq t \leq b$$

ein beliebiger Weg und $\mathbf{K}$ ein beliebiges Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n$. Das *Arbeitsintegral* oder *Linienintegral* entlang dem Weg γ ist dann definiert als

$$\int_\gamma \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} := \int_a^b \mathbf{K}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt\,.$$

(a) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} &= \int_1^2 \begin{pmatrix} 3(t^2+1) \cdot 2t^2 \\ -5t^3 \\ 10(t^2+1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 4t \\ 3t^2 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_1^2 (12t^5 + 12t^3 - 20t^4 + 30t^4 + 30t^2)\, dt \\
&= \int_1^2 (12t^5 + 10t^4 + 12t^3 + 30t^2)\, dt \\
&= (2t^6 + 2t^5 + 3t^4 + 10t^3)\Big|_1^2 \\
&= 2^7 + 2^6 + 3 \cdot 2^4 + 10 \cdot 2^3 - (2+2+3+10) \\
&= 303\,.
\end{aligned}$$

(b) Es folgt

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(t)\sin(t) \\ -2\sin^2(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt \\
&= -\int_0^{2\pi} (\sin^2(t)\cos(t) + 2\sin^2(t)\cos(t))\, dt \\
&= -\int_0^{2\pi} 3\sin^2(t)\cos(t)\, dt = -\sin^3(t)\Big|_0^{2\pi} = 0\,.
\end{aligned}$$

(c) Zuletzt berechnen wir

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos^2(t) + t \\ -2\cos^2(t) + \sin(t) \\ e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-\cos^2(t)\sin t - t\sin t - 2\cos^3(t) + \sin(t)\cos(t) + e^t)\, dt \\
&= -\int_0^{2\pi} (t\sin(t) + 2\cos^3(t))\, dt + \left(\frac{1}{3}\cos^3(t) - \frac{1}{2}\cos^2(t) + e^t\right)\Big|_0^{2\pi} \\
&= -\int_0^{2\pi} (t\sin(t) + 2\cos^3(t))\, dt + e^{2\pi} - 1\,.
\end{aligned}$$

Es bleiben die Integrale $\int_0^{2\pi} t\sin(t)\, dt$ und $\int_0^{2\pi} 2\cos^3(t)\, dt$ zu berechnen. Es folgt mittels partieller Integration

$$\int_0^{2\pi} t\sin(t)\, dt = -t\cos(t)\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos(t)\, dt = -2\pi\,.$$

Weiter folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} 2\cos^3(t)\, dt &= 2\int_0^{2\pi} \left(1 - \sin^2(t)\right)\cos(t)\, dt \\
&= 2\sin(t)\Big|_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\cos(t)\, dt = -2\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\cos(t)\, dt \\
&= -\frac{2}{3}\sin^3(t)\Big|_0^{2\pi} = 0\,.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\int_\gamma \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = 2\pi + e^{2\pi} - 1\,.$$

9.6. Das Potential

(a) Da wir bereits wissen, dass **K** konservativ ist, folgt, dass das Linienintegral

$$f(P) := \int_{P_0}^{P} K \cdot \mathrm{d}x$$

nicht von der Wahl eines Wegs von P_0 nach P abhängt, und definiert für jeden festen Anfangspunkt $P_0 \in \mathbb{R}^2$ ein Potential zu K. Der Einfachheit halber wählen wir als Weg die gerade Strecke

$$\gamma \;:\; t \mapsto \begin{pmatrix} xt \\ yt \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1]\,,$$

von $P_0 := \binom{0}{0}$ nach $P = \binom{x}{y}$. Das Potential f ergibt sich dann als

$$\begin{aligned}
f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \int_0^1 K(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 K\begin{pmatrix} xt \\ yt \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} y^2t^2 + 5 \\ 2xyt^2 - 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left[xy^2t^2 + 5x + 2xy^2t^2 - 8y \right] \mathrm{d}t \\
&= \left[xy^2t^3 + (5x - 8y)t \right]_{t=0}^1 \\
&= xy^2 + 5x - 8y\,.
\end{aligned}$$

(b) Sei f ein Potential zu K. Aus $f_x\binom{x}{y} = P\binom{x}{y} = y^2 + 5$ folgt dann mit dem unbestimmten Integral

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int (y^2 + 5)\,dx = (y^2 + 5)x + g(y) = xy^2 + 5x + g(y),$$

wobei die Integrationskonstante $g(y)$ noch von y abhängen darf! Ableiten dieser Gleichung nach y liefert

$$f_y\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2xy + g'(y).$$

Andererseits gilt

$$f_y\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{!}{=} Q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2xy - 8,$$

also $g'(y) = -8$ und somit $g(y) = -8y + c$ für eine Konstante c. Somit ist

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xy^2 + 5x - 8y + c$$

ein Potential zu K.

(c) Die in (a) und (b) enthaltenen Lösungen unterscheiden sich höchstens durch eine Konstante, so wie sich je zwei Potentiale zu einem Vektorfeld um höchstens eine Kostante unterscheiden.

(d) Sei f ein Potential zu K. Aus $f_x\binom{x}{y} = P\binom{x}{y} = x^2 - 2y^3$ folgt durch Integration nach x, dass

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int (x^2 - 2y^3)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - 2xy^3 + g(y),$$

wobei die Integrationskonstante $g(y)$ von y, aber keinesfalls von x, abhängen darf. Durch Ableiten dieser Gleichung nach y erhalten wir

$$f_y\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = -6xy^2 + g'(y).$$

Zusammen mit der Gleichung

$$f_y\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \stackrel{!}{=} Q\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x + 5y,$$

schliessen wir daraus, dass gilt $g'(y) = 6xy^2 + x + 5y$. Dies ist ein Widerspruch, da die Funktion g und damit auch ihre Ableiung nur von y abhängen darf. Folglich existiert kein Potential

(e) Das Potential, wie in Satz 6.2 für konservative Vektorfelder ist in diesem Falle nicht mehr wohldefiniert. Denn man könnte zwar irgendeinen Pfad vom Ursprungspunkt fixieren und entlang dieses integrieren, aber das erfüllt nur dann die Bedingungen eines Potentials, wenn dies dasselbe ergibt, wie entlang jedes beliebigen anderen Pfades.