10.1. Satz von Green I

(a) Um den Flächeninhalt mithilfe des Satzes von Green zu berechnen, nutzen wir das Vektorfeld $\mathbf{K} = (0, x)$. Da $\operatorname{rot}(\mathbf{K}) = \frac{\partial}{\partial x} K_2 - \frac{\partial}{\partial y} K_1 = 1$ gilt

$$\operatorname{Vol}(Q) = \int_Q 1 \, d\mu(x,y) = \int_Q \operatorname{rot}(\mathbf{K}) \, d\mu(x,y) = \int_{\partial Q} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z}.$$

∂Q besteht aus vier Teilen und wir berechnen in jedem das Linienintegral einzeln. Sei $\gamma_1 \colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (0, 1-t)$ mit $\dot{\gamma}_1 = (0, -1)$. Dann ist

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt = 0.$$

Sei $\gamma_2(t) = (1, t)$ mit $\dot{\gamma}_2 = (0, 1)$. Dann ist

$$\int_{\gamma_2} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = 1.$$

Seien $\gamma_3(t) = (1-t, 0)$ mit $\dot{\gamma}_3 = (-1, 0)$ und $\gamma_4(t) = (t, 1)$ mit $\dot{\gamma}_4 = (1, 0)$. Man sieht schnell, dass

$$\int_{\gamma_3} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z} = \int_{\gamma_4} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z} = 0.$$

Die Summe dieser vier Integrale ergibt, wie zu erwarten war, einen Flächeninhalt von 1.

Varianten: Man kann auch mit den Vektorfeldern $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\mathbf{K} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ rechnen.

(b) Für das $\mathbf{K}$ wie in der Aufgabe erhalten wir $\operatorname{rot}(\mathbf{K}) = 1$ und damit $\int_{\partial Q} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z} = 1$.

Bemerkung: Auch dieses Vektorfeld ist also eines, welches man zur Berechnung des Flächeninhalts verwenden könnte, aber natürlich ist es viel zu kompliziert, um einen praktischen Nutzen zu haben.

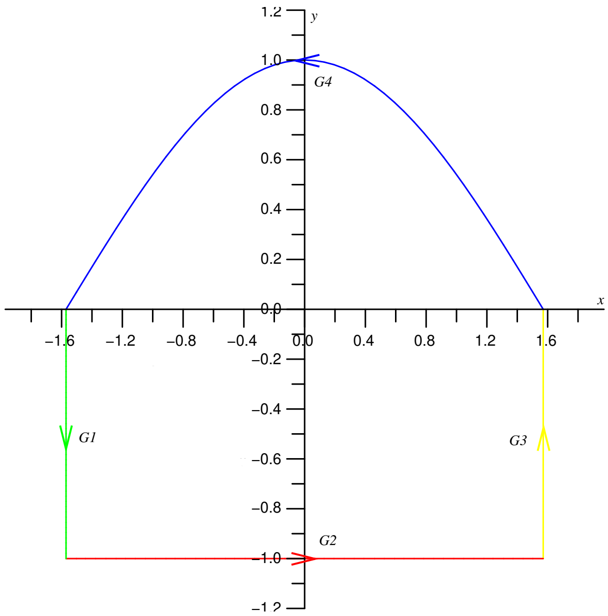
(c) Wir nutzen wiederum Green und haben hier $\operatorname{rot}(\mathbf{K}) = 2x - x = x$. Integrieren wir dies über Q haben wir

$$\int_0^1 \int_0^1 x \, dx dy = \frac{1}{2}.$$

10.2. Satz von Green II

Zunächst skizzieren wir den Rand ∂B des Gebietes

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2},\; -1 \leq y \leq \cos(x) \right\}.$$



Nun parametrisieren wir die vier Randstücke G_1, G_2, G_3 und $-G_4$ durch die vier Kurvenstücke

$$\gamma_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} \\ -t \end{pmatrix},\quad t \in [0,1], \qquad \gamma_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2}+t\pi \\ -1 \end{pmatrix},\quad t \in [0,1],$$
$$\gamma_3 : t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ t-1 \end{pmatrix},\quad t \in [0,1], \qquad \gamma_4 : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \cos(t) \end{pmatrix},\quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Die Tangentialvektoren an diese Kurvenstücke sind

$$\dot\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},\; \dot\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix},\; \dot\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\text{ und }\; \dot\gamma_4(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Daraus erhalten wir

$$I_1 := \int_{\gamma_1} \mathbf{K} \cdot dx = \int_{\gamma_1} \Big\langle \mathbf{K}(\gamma_1(t)), \dot{\gamma}_1(t) \Big\rangle \, dt = \int_{\gamma_1} \left\langle \begin{pmatrix} y(t) \\ \sin(x(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \right\rangle \, dt$$
$$= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} -t \\ \sin(-\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \, dt = \int_0^1 1 \, dt = 1,$$

$$I_2 := \int_{\gamma_2} \mathbf{K} \cdot dx = \int_{\gamma_2} \Big\langle \mathbf{K}(\gamma_2(t)), \dot{\gamma}_2(t) \Big\rangle \, dt = \int_{\gamma_2} \left\langle \begin{pmatrix} y(t) \\ \sin(x(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \right\rangle \, dt$$
$$= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ \sin(-\frac{\pi}{2} + t\pi) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \, dt = -\pi \int_0^1 1 \, dt = -\pi$$

und

$$I_3 := \int_{\gamma_3} \mathbf{K} \cdot dx = \int_{\gamma_3} \Big\langle \mathbf{K}(\gamma_3(t)), \dot{\gamma}_3(t) \Big\rangle \, dt = \int_{\gamma_3} \left\langle \begin{pmatrix} y(t) \\ \sin(x(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \right\rangle \, dt$$
$$= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} t-1 \\ \sin(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \, dt = \int_0^1 1 \, dt = 1$$

sowie

$$I_4 := \int_{\gamma_4} \mathbf{K} \cdot dx = \int_{\gamma_4} \Big\langle \mathbf{K}(\gamma_4(t)), \dot{\gamma}_4(t) \Big\rangle \, dt = \int_{\gamma_4} \left\langle \begin{pmatrix} y(t) \\ \sin(x(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \right\rangle \, dt$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\langle \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \right\rangle \, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big[\cos(t) - \sin^2(t) \Big] \, dt$$
$$= \sin(t) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(t)\cos(t)}{2} \right] \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2 - \frac{\pi}{2} \, .$$

Unter Berücksichtigung der Durchlaufrichtungen der gewählten Parametrisierungen der Randkurvenstücke gilt

$$I_b = \oint_{\partial B} \mathbf{K} \cdot dx = I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 1 - \pi + 1 - \left[2 - \frac{\pi}{2} \right] = -\frac{\pi}{2} \, .$$

Durch Anwendung des Satzes von Green erhalten wir das gleiche Ergebnis:

$$
\begin{aligned}
I_b &= \oint_{\partial B} \mathbf{K} \cdot dx = \int_B \operatorname{rot}(\mathbf{K})\, dB = \int_B \left[K_x^2 - K_y^1 \right] dx\, dy \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-1}^{\cos(x)} [\cos(x) - 1]\, dy\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\cos(x) - 1] \cdot [\cos(x) + 1]\, dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\cos^2(x) - 1 \right] dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\, dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx \\
&= \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(x)\cos(x)}{2} \right] \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}
$$

10.3. Linienintegral

(a) Wir parametrisieren den Kreis mit

$$\gamma : [0, 2\pi] \to S^1, \qquad \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)).$$

Diese durchläuft den Kreis im Gegenuhrzeigersinn und es gilt (mit $x^2 + y^2 = 1$):

$$
\begin{aligned}
\int_{S^1} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\sin^2(t) + \cos^2(t))\, dt \\
&= 2\pi
\end{aligned}
$$

(b) Wir berechnen

$$
\begin{aligned}
\partial_x K_2 - \partial_y K_1 &= \partial_x \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) - \partial_y \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \\
&= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0.
\end{aligned}
$$

(c) Wir können den Satz von Green nicht auf den Einheitskreis $D := \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ anwenden, da das Vektorfeld $\mathbf{K}$ im Punkt $(0, 0)$ nicht definiert ist und sich auch nicht in diesen Punkt stetig fortsetzten lässt. Ebenso können wir den Satz von Green nicht auf das Gebiet $\dot{D} := \{0 < x^2 + y^2 < 1\}$ anwenden, da dieses Gebiet nicht glatt berandet ist: Es gilt $\partial \dot{D} = S^1 \cup \{(0, 0)\}$ und der Randpunkt $\{(0, 0)\}$ ist singulär bzw. nicht Teil eines eindimensionalen Randstücks.

Tatsächlich sehen wir auch, dass $\operatorname{rot}(\mathbf{K}) = 0$ und trotzdem das Linienintegral in a) nicht verschwindet.

Bemerkung: Im Gegensatz zu Aufgabe 10.4 gibt es für dieses Vektorfeld hier kein Potential. Aus $\operatorname{rot} \mathbf{K} = 0$ folgt nur für einfach zusammenhängende Gebiete die Existenz eines Potentials.

(d) Hier können wir nun Green verwenden und zwar auf das Gebiet B, welches zwischen den Kurven $\{x^2 + y^2 = 1\}$ und $\{x^2 + \frac{y^2}{4} = 1\}$ liegt. Der Rand von B ist dann genau $S^1 - \gamma$. Damit sehen wir dank $\operatorname{rot} \mathbf{K} = 0$, dass wir dasselbe Resultat wie in a) kriegen, denn

$$0 = \int_B \operatorname{rot} \mathbf{K} \, d\mu(x, y) = \int_{\partial B} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z} = \int_{S^1} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z} - \int_\gamma \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z}.$$

(Um zu verhindern, dass die Punkte $(\pm 1, 0)$ sowohl in γ als auch in S^1 liegen, können wir zuerst mit der Kurve $\{x^2 + y^2 = \frac{1}{2}\}$ vergleichen.)

10.4. Das Potential

(a) Der Kreis mit Radius $R > 0$ und Mittelpunkt am Ursprung kann auf folgende Weise durch Polarkoordinaten parametrisiert werden:

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos(t) \\ R\sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad t \in [\,0, 2\pi)\,.$$

Daraus erhalten wir

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -R\sin(t) \\ R\cos(t) \end{pmatrix}, \ \mathbf{K}(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} \frac{-2R\cos(t) \cdot R\sin(t)}{(R^2)^2} \\ \frac{R^2\cos^2(t) - R^2\sin^2(t)}{(R^2)^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{R^2} \begin{pmatrix} -2\cos(t)\sin(t) \\ \cos^2(t) - \sin^2(t) \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t) &= \frac{1}{R^2} \begin{pmatrix} -2\cos(t)\sin(t) \\ \cos^2(t) - \sin^2(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -R\sin(t) \\ R\cos(t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{R} \Big[2\cos(t)\sin^2(t) + \cos^3(t) - \cos(t)\sin^2(t) \Big] \\ &= \frac{1}{R} \cos(t) \Big[\cos^2(t) + \sin^2(t) \Big] = \frac{1}{R} \cos(t). \end{aligned}$$

Das Umlaufintegral berechnet sich also zu

$$\int_\gamma \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z} = \int_0^{2\pi} \mathbf{K}(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t) \, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R} \cos(t) \, dt = \frac{1}{R} \sin(t) \Big|_{t=0}^{2\pi} = 0.$$

(b) Wir suchen ein Potential von $\mathbf{K}$, d.h. eine Funktion $f(x,y)$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ mit

$$\nabla f = \mathbf{K}$$

oder in Komponenten

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,. \tag{1}$$

Wir lösen die erste Gleichung in (1) durch unbestimmte Integration nach x (y ist dabei eine Konstante) und erhalten

$$f(x,y) = \int \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\,dx = \int \frac{-y}{u^2}\,du = \frac{y}{u} + C(y) = \frac{y}{x^2+y^2} + C(y),$$

wobei wir die Substitution $u = u(x) := x^2 + y^2$ mit $du = 2x\,dx$ verwendet haben. Jetzt setzen wir $f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} + C(y)$ in die zweite Gleichung in (1) ein und finden

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1\cdot(x^2+y^2) - y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} + C'(y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + C'(y) \overset{!}{=} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,,$$

woraus folgt

$$C'(y) = 0 \;\Leftrightarrow\; C(y) = C = \text{konst.}$$

Die Funktion

$$f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} + C\,,$$

ist daher ein Potential von $\mathbf{K}$, wobei für C eine beliebige Konstante gewählt werden kann (z.B. $C = 0$). Das Feld $\mathbf{K}$ ist damit ein Gradientenfeld und folglich konservativ.

(c) Für ein Vektorfeld

$$\mathbf{K}(x,y) = \begin{pmatrix} K_1(x,y) \\ K_2(x,y) \end{pmatrix}$$

lautet die Integrabilitätsbedingung $\operatorname{rot}\mathbf{K} := \frac{\partial K_2}{\partial x} - \frac{\partial K_1}{\partial y} = 0$, was wir durch direkte

Rechnung nachprüfen können. Wir erhalten

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{K} &= \frac{\partial K_2}{\partial x} - \frac{\partial K_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right] \\
&= \frac{2x(x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2)\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^4} \\
&\quad + \frac{2x(x^2+y^2)^2 - (2xy)\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^4} \\
&= \frac{2x(x^2+y^2) - (x^2-y^2)\cdot 4x + 2x(x^2+y^2) - (2xy)\cdot 4y}{(x^2+y^2)^3} \\
&= \frac{4x\Big[(x^2+y^2)-(x^2-y^2)\Big] - (2xy)\cdot 4y}{(x^2+y^2)^3} = \frac{8xy^2 - 8xy^2}{(x^2+y^2)^3} = 0\,.
\end{aligned}
$$

Hinweis: Die Existenz eines Potentials impliziert, dass das Linienintegral über jede geschlossene Kurve 0 ist (insbesondere in Aufgabe a)).

10.5. Satz von Green III

(a) Setzen wir $F(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy$, so wissen wir nach dem Satz der impliziten Funktionen, dass sich die Kurve überall dort lokal als Graph schreiben lässt, wo $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$. Berechne deshalb

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 3ax = 0 \\
&\Rightarrow y = \sqrt{ax},
\end{aligned}
$$

falls $x \geq 0$ und keine Lösung für $x < 0$. Setzen wir dies nun in die ursprüngliche Gleichung ein, um zu sehen, welche dieser Punkte tatsächlich auf der Kurve liegen, so ergibt sich

$$
F(x,\sqrt{ax}) = x^3 + (ax)^{\frac{3}{2}} - 3ax\sqrt{ax} = x^{\frac{3}{2}}\left(x^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{3}{2}} - 3a^{\frac{3}{2}}\right),
$$

Die Nullstellen davon sind $x = 0$ und $x = 2^{\frac{2}{3}}a$. Die Kurve lässt sich also überall, ausser bei den Punkten $(0,0)$ und $(2^{\frac{2}{3}}a, \sqrt{a2^{\frac{2}{3}}a}) = (2^{\frac{2}{3}}a, 2^{\frac{1}{3}}a)$ als Graph einer Funktion schreiben.

(b) Um die Randkurve des Kartesischen Blattes zu parametrisieren gehen wir wie folgt vor.
Falls $x \neq 0$ ist, wählen wir den Kurvenparameter so, dass gilt

$$y = xt\,.$$

Wir setzen dies in die Gleichung $x^3 + y^3 = 3axy$ ein und lösen nach x auf:

$$x^3 + y^3 = x^3 + t^3x^3 = 3ax^2t \;\Leftrightarrow\; x = \frac{3at}{1+t^3}\,.$$

Falls $x = 0$ ist, ist $y = 0$ die einzige Lösung der Gleichung $x^3 + y^3 = 3axy\,$.
Insgesamt erhalten wir die parametrisierte Kurve

$$t \mapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{3at}{1+t^3}\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

In der Bemerkung weiter unten wird ausgeführt, dass der geschlossene Teil des Kartesischen Blattes genau die Kurve

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{3at}{1+t^3}\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad t \in [0, +\infty)\,,$$

ist und, dass die Fläche links von der so parametrisierten Kurve liegt.

Zur Berechnung des Flächeninhaltes von B betrachten wir das Vektorfeld

$$\mathbf{K}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \;\text{ mit }\; \operatorname{rot}(\mathbf{K}) = K^2_x - K^1_y = 1.$$

Mit Hilfe des Satzes von Green erhalten wir

$$\begin{aligned}
\text{Fläche}[B] &= \int_B d\mu = \int_B \operatorname{rot}(\mathbf{K})\, d\mu \overset{\text{Green}}{=} \oint_{\partial B} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z} = \oint_{\partial B} x\, dy = \int_0^\infty x(t)\, \dot{y}(t)\, dt \\
&= \int_0^\infty \frac{3at}{1+t^3} \cdot \frac{6at \cdot (1+t^3) - 3at^2 \cdot 3t^2}{(1+t^3)^2}\, dt \\
&= 3a^2 \int_0^\infty \frac{6t^2 \cdot (1+t^3) - 3t^3 \cdot 3t^2}{(1+t^3)^3}\, dt = 3a^2 \int_0^\infty \frac{2(1+t^3) - 3t^3}{(1+t^3)^3}\, 3t^2\, dt
\end{aligned}$$

Durch die Substitution $u := 1 + t^3 \;\Rightarrow\; du = 3t^2\, dt,\; u(0) = 1,\; \lim_{t\to\infty} u(t) = \infty$ folgt

$$\begin{aligned}
\text{Fläche}[B] &= 3a^2 \int_1^\infty \frac{2u - 3(u-1)}{u^3}\, du = 3a^2 \int_1^\infty \left[3u^{-3} - u^{-2}\right] du \\
&= 3a^2 \left[-\frac{3}{2}\, u^{-2} + u^{-1}\right]\Bigg|_1^\infty = 3a^2 \left[\frac{3}{2} - 1\right] = \frac{3}{2}\, a^2.
\end{aligned}$$

Der Flächeninhalt des geschlossenen Teils des Kartesischen Blattes beträgt $\frac{3}{2}\,a^2$.

Bemerkung: Als Begründung, dass der geschlossene Bereich der Kurve

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3at}{1+t^3} \\ \frac{3at^2}{1+t^3} \end{pmatrix}, \qquad t \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$$

durch das Intervall $0 \le t < +\infty$ parametrisiert wird, müssen wir den Verlauf der Kurve analysieren.

Bei $t = -1$ wird die Parametrisierung singulär: Für $t \to -1^-$ geht $x \to -\infty$, $y \to +\infty$, für $t \to -1^+$ geht $x \to +\infty$, $y \to -\infty$. Das Bild der Kurve geht in verschiedene Richtungen ins Unendliche. Interessant ist, dass die Summe

$$x + y = \frac{3at}{1+t^3} + \frac{3at^2}{1+t^3} = \frac{3at(1+t)}{(1+t)(1-t+t^2)} = \frac{3at}{1-t+t^2} \overset{t \to -1}{\to} -a$$

dabei beschränkt bleibt, das heisst die Kurve schmiegt sich asymptotisch an die Gerade $x + y = -a$ an.

Die Kurve $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ ist in jedem Punkt $t \neq -1$ stetig, und auch für $t \to +\infty$ oder $t \to -\infty$ exitieren die Grenzwerte

$$\lim_{t \to \pm\infty} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \lim_{t \to \pm\infty} \begin{pmatrix} \frac{3at}{1+t^3} \\ \frac{3at^2}{1+t^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit der Abschnitt der Kurve $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ mit $t \in [t_1, t_2]$, $t_1 \neq t_2$, geschlossen ist, müssen die Endpunkte die gleichen Bilder haben, das heisst $\begin{pmatrix} x(t_1) \\ y(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t_2) \\ y(t_2) \end{pmatrix}$.
Die Kurve kann sich auf keinem endlichen Teilintervall schliessen, denn für $x(t) \neq 0$ gilt stets $t = \frac{y(t)}{x(t)}$, woraus der Widerspruch $t_1 = t_2$ folgt. Ausserdem wird $x(t) = 0$ nur für einen endlichen Wert, $t = 0$, angenommen.

Im Unendlichen gilt jedoch auch $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \overset{t \to \pm\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$. Deshalb ist die Kurve auf dem Intervall $t \in [0, +\infty)$ geschlossen. Die Endpunkte werden beide auf $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ abgebildet.
Das andere Intervall $t \in (-\infty, 0]$ ist nicht zulässig, weil die Kurve bei $t = -1$ nicht definiert ist und ins Unendliche geht.

Bleibt die Frage zu klären, warum das Innere der Schleife

$$t \in [0,+\infty) \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3at}{1+t^3} \\ \frac{3at^2}{1+t^3} \end{pmatrix}$$

links von der Kurve liegt, wie es für die Anwendung der Green–Formel notwendig ist. Das liegt daran, dass für $t \neq 0$ die Gleichung

$$t = \frac{y(t)}{x(t)}$$

gilt, aus der folgt, dass t der Anstieg der Geraden ist, die die Punkte $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ verbindet. Ausserdem gilt für $t \in [0,+\infty)$, dass $x(t), y(t) > 0$ ist.
Folglich liegt die Kurve im ersten Quadranten, beginnt für $t = 0$ im Ursprung und verläuft dann, wenn man mit t von 0 zu $+\infty$ läuft, so, dass der Anstieg ($= t$) des Vektors $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ ständig wächst, bis am Ende für $x \to +\infty$ die Kurve wieder im Nullpunkt endet. Das kann nur sein, wenn das Innere des von der Kurve umschlossenen Gebietes links von der Kurve liegt.