11.1. Rotation und Divergenz I

(a) $\operatorname{rot} \mathbf{K_1} = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{K_1} = 2$.

(b) $\operatorname{rot} \mathbf{K_2} = y^2 - x^2$, $\operatorname{div} \mathbf{K_2} = 4xy$.

(c) $\operatorname{rot} \mathbf{K_3} = b - a$, $\operatorname{div} \mathbf{K_3} = 0$.

11.2. Satz von Gauss

(a) Der Rand ∂B des Dreiecks B wird durch die drei Kurven

$$\gamma_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \end{pmatrix}, \; \gamma_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma_3 : t \mapsto \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix}$$

für $t \in [\,0, 1\,]$ parametrisiert, welche die Tangentialvektoren

$$\dot{\gamma}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \; \dot{\gamma}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \dot{\gamma}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

haben, mit den Beträgen

$$\left|\dot{\gamma}_1\right| = \left|\dot{\gamma}_2\right| = 1 \quad \text{und} \quad \left|\dot{\gamma}_3\right| = \sqrt{2}\,.$$

Des Weiteren benötigen wir die nach aussen weisenden Normalenvektorfelder

$$\mathbf{N_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \mathbf{N_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{N_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Fluss des Vektorfeldes K durch den Rand ∂B des Dreiecks B von innen nach aussen ist das Flussintegral

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int_{\partial B} \mathbf{K}\cdot\mathbf{N}\,ds = \sum_{n=1}^{3}\int_{\gamma_n}\mathbf{K}\cdot\mathbf{N_n}\,d\gamma_n = \sum_{n=1}^{3}\int_0^1 \mathbf{K}\cdot\mathbf{N_n}\left|\dot\gamma_n\right|dt \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix}-(1-t)^2\\(1-t)^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}1\,dt + \int_0^1\begin{pmatrix}0\\t^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}1\,dt \\
&\quad + \int_0^1\begin{pmatrix}2(1-t)t-t^2\\(1-t)^2+t^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\sqrt2\,dt \\
&= \int_0^1[\,1-t\,]^2dt - \int_0^1 t^2dt + \int_0^1\Big[\,2(1-t)t-t^2+(1-t)^2+t^2\,\Big]\,dt \\
&= \int_0^1\Big[\,(t-1)^2-t^2+(t-1)^2-2t(t-1)\,\Big]\,dt \\
&= \int_0^1\Big[\,-t^2-2t+2\,\Big]\,dt = \Big[-\frac{t^3}{3}-t^2+2t\Big]_0^1 = \frac{2}{3}\,.
\end{aligned}$$

(b) Die Divergenz von $\mathbf{K}$ ist

$$\operatorname{div}(\mathbf{K}) = K^1_x + K^2_y = 2y + 2y = 4y$$

und mit Hilfe des Satzes von Gauss erhalten wir

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int_{\partial B}\mathbf{K}\cdot\mathbf{N}\,ds = \int_B \operatorname{div}(\mathbf{K})\,d\mu = \int_0^1\int_0^{1-x}4y\,dy\,dx \\
&= 4\int_0^1 \frac{y^2}{2}\bigg|_0^{1-x}dx = 2\int_0^1[\,1-x\,]^2\,dx = -\frac{2}{3}[\,1-x\,]^3\bigg|_0^1 = \frac{2}{3}\,.
\end{aligned}$$

11.3. Rotation und Divergenz II

(a) $\textbf{rot}\,\mathbf{K} = \begin{pmatrix}z\\x\\y\end{pmatrix}$, $\operatorname{div}\mathbf{K} = x+y+z$.

(b) $\textbf{rot}\,\mathbf{L} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\operatorname{div}\mathbf{L} = 0$.

(c) $\textbf{rot}\,\mathbf{M} = 2\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, $\operatorname{div}\mathbf{M} = 0$.

11.4. Fluss durch Oberfläche

(a) Wir benutzen die gegebene Parametrisierung Φ, um den Normalenvektor zu berechnen. Dazu rechnen wir

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2\sin\varphi \\ 2\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cos\varphi \\ -2\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies müssen wir noch normalisieren. Es gilt $\left\| \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{4\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi} = 2,$ also ist ein Einheitsnormalenvektorfeld gegeben durch

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2\cos\varphi \\ -2\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) An einer Stelle $(x, y, z) \in Z$ ist der Normalenvektor also gegeben durch $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix}$, dies macht Sinn, denn der Zylinder entspricht im Wesentlichen dem Kreis mit Radius 2 in $\mathbb{R}^2$, wenn wir also überall die dritte Komponente ignorieren, ergibt dies genau den nach innen gerichteten Normalenvektor des Kreises.

(c) Da wir den Fluss von innen nach aussen berechnen sollen, brauchen wir das nach aussen gerichtete Normalenfeld, also $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$. Schreiben wir das Vektorfeld als $\mathbf{K}(x, y, z) = \mathbf{K_0} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, so kriegen wir für den Fluss

$$\begin{aligned} \int_Z \mathbf{K} \cdot d\omega &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} 2 d\varphi dz \\ &= 2\int_0^{2\pi} (a\cos\varphi + b\sin\varphi)\, d\varphi = 0. \end{aligned}$$

Der Faktor 2 kommt vom Oberflächenelement, also dem Betrag der Gramschen Determinante, welche stets der Länge des (wie in a) berechneten) nicht normalisierten Normalenvektors entspricht.

Alternative Lösung: Mit dem Satz von Gauss. Dabei müssen wir beachten, dass die gegebene Zylinderoberfläche selbst kein Volumen umschliesst, wir müssen also Randteile hinzunehmen und den Fluss durch diese wieder abziehen. Wir betrachten dazu den vollen Zylinder V, gegeben durch die Parametrisierung

$$\begin{aligned}\Psi\colon [0,1]\times[0,1]\times[0,2\pi] &\to \mathbb{R}^3\\ (r,z,\varphi) &\mapsto (2r\cos\varphi, 2r\sin\varphi, z).\end{aligned}$$

Der Rand davon ist dann $\partial V = Z \cup B \cup D$, wobei Z die gegebene Mantelfläche ist, B der Boden bei $z = 0$ und D der Deckel bei $z = 1$. Wir können also aus obiger Parametrisierung des Vollzylinders direkt auch die Parametrisierungen von D und B ablesen:

$$\begin{aligned}\Phi_D\colon [0,1]\times[0,2\pi] &\to \mathbb{R}^3\\ (r,\varphi) &\mapsto (2r\cos\varphi, 2r\sin\varphi, 1)\\ \Phi_B\colon [0,1]\times[0,2\pi] &\to \mathbb{R}^3\\ (r,\varphi) &\mapsto (2r\cos\varphi, 2r\sin\varphi, 0).\end{aligned}$$

Da $\operatorname{div}(\mathbf{K}) = 0$, sagt der Satz von Gauss:

$$0 = \int_V \operatorname{div}(\mathbf{K})\,d\mu = \int_{\partial V} \mathbf{K}\cdot\,d\omega = \int_Z \mathbf{K}\cdot\,d\omega + \int_B \mathbf{K}\cdot\,d\omega + \int_D \mathbf{K}\cdot\,d\omega.$$

Wir müssen also den Fluss durch den Boden und den Deckel berechnen. Hierbei gilt, dass die Einheitsnormalenvektoren gegeben sind durch

$$\mathbf{n_D} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad \mathbf{n_B} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

(Man beachte die Vorzeichen: Die Normalenvektoren sollen immer nach aussen zeigen, berechnen wir sie also mithilfe der Parametrisierung müssen wir prüfen, ob die Richtung korrekt ist.)

Es ist dann also $\mathbf{n_D}\cdot\mathbf{K} = c$, $\mathbf{n_B}\cdot\mathbf{K} = -c$ und damit

$$\begin{aligned}\int_D \mathbf{K}\cdot\,d\omega &= c\operatorname{Vol}(D) = 4c\pi,\\ \int_B \mathbf{K}\cdot\,d\omega &= -c\operatorname{Vol}(B) = -4c\pi.\end{aligned}$$

(Wir haben hier die Parametrisierung nicht verwendet, da die Vektoren einfach genug waren. Hätten wir die Parametrisierung eingesetzt, hätten wir das Oberflächenelement $d\omega = 4r\,drd\varphi$ gekriegt.)

Wir kriegen also schliesslich für den Fluss durch Z:

$$\int_Z \mathbf{K}\cdot\,d\omega = -\int_D \mathbf{K}\cdot\,d\omega - \int_B \mathbf{K}\cdot\,d\omega = 0.$$

11.5. Operationen auf Vektor- und Skalarfeldern

Wir setzen voraus, dass $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$ zweimal stetig differenzierbare Vektorfelder im Raum sind, während $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist. Wir kürzen ausserdem ab: $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$ etc.

(a) Durch Anwenden der Definition der Divergenz und der Produktregel für die partiellen Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(f\mathbf{K}) &= \partial_x(fK_1) + \partial_y(fK_2) + \partial_z(fK_3) \\
&= (\partial_x f) \cdot K_1 + f \cdot (\partial_x K_1) + (\partial_y f) \cdot K_2 + f \cdot (\partial_y K_2) + (\partial_z f) \cdot K_3 + f \cdot (\partial_z K_3) \\
&= \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} + f \cdot (\partial_x K_1 + \partial_y K_2 + \partial_z K_3) \\
&= \nabla f \cdot \mathbf{K} + f \cdot \operatorname{div} \mathbf{K}\,.
\end{aligned}$$

(b) Durch Anwenden der Definition der Divergenz und der Produktregel für die partiellen Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\mathbf{K} \times \mathbf{L}) &= \operatorname{div} \begin{pmatrix} K_2L_3 - K_3L_2 \\ K_3L_1 - K_1L_3 \\ K_1L_2 - K_2L_1 \end{pmatrix} \\
&= \partial_x(K_2L_3 - K_3L_2) + \partial_y(K_3L_1 - K_1L_3) + \partial_z(K_1L_2 - K_2L_1) \\
&= K_2\partial_x L_3 - K_3\partial_x L_2 + L_3\partial_x K_2 - L_2\partial_x K_3 + K_3\partial_y L_1 - K_1\partial_y L_3 \\
&\quad + L_1\partial_y K_3 - L_3\partial_y K_1 + K_1\partial_z L_2 - K_2\partial_z L_1 + L_2\partial_z K_1 - L_1\partial_z K_2 \\
&= -K_1(\partial_y L_3 - \partial_z L_2) + L_1(\partial_y K_3 - \partial_z K_2) - K_2(\partial_z L_1 - \partial_x L_3) \\
&\quad + L_2(\partial_z K_1 - \partial_x K_3) - K_3(\partial_x L_2 - \partial_y L_1) + L_3(\partial_x K_2 - \partial_y K_1) \\
&= -\mathbf{K} \cdot \mathbf{rot}\,\mathbf{L} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{rot}\,\mathbf{K} \\
&= \mathbf{L} \cdot \mathbf{rot}\,\mathbf{K} - \mathbf{K} \cdot \mathbf{rot}\,\mathbf{L}\,.
\end{aligned}$$

(c) Durch Anwenden der Definition der Rotation und des Gradienten sowie der Vertauschbarkeit von partiellen Ableitungen erhalten wir

$$\mathbf{rot}(\operatorname{grad} f) = \mathbf{rot} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y f_z - \partial_z f_y \\ \partial_z f_x - \partial_x f_z \\ \partial_x f_y - \partial_y f_x \end{pmatrix} = 0\,.$$

(d) Durch Anwenden der Definitionen der Divergenz und der Rotation sowie der Vertauschbarkeit von partiellen Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathbf{rot}\,\mathbf{K}) &= \operatorname{div}\begin{pmatrix}\partial_y K_3 - \partial_z K_2\\ \partial_z K_1 - \partial_x K_3\\ \partial_x K_2 - \partial_y K_1\end{pmatrix}\\ &= \partial_x\partial_y K_3 - \partial_x\partial_z K_2 + \partial_y\partial_z K_1 - \partial_y\partial_x K_3 + \partial_z\partial_x K_2 - \partial_z\partial_y K_1 = 0\,.\end{aligned}$$

(e) Durch Anwenden der Resultate aus den Teilaufgaben a) und d) erhalten wir

$$\operatorname{div}(f\cdot\mathbf{rot}\,\mathbf{K}) \overset{\text{a)}}{=} \operatorname{grad} f\cdot\mathbf{rot}\,\mathbf{K} + f\cdot\operatorname{div}(\mathbf{rot}\,\mathbf{K}) \overset{\text{d)}}{=} \operatorname{grad} f\cdot\mathbf{rot}\,\mathbf{K}\,.$$