12.1. Satz von Gauss

Wir wenden den Gaußschen Integralsatz an auf das Gebiet
$G := \left\{(x,y,z) \,:\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1;\, x,y,z \ge 0\right\}$:

$$\int_G \operatorname{div} \mathbf{K} \; d\mu(x,y,z) = \int_{\partial G} \mathbf{K} \cdot \vec{\mathbf{n}} \, d\omega \,.$$

Die linke Seite ist 0, da

$$\mathbf{K} = (yz, xz, xy) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \mathbf{K} = \frac{\partial}{\partial x}(yz) + \frac{\partial}{\partial y}(xz) + \frac{\partial}{\partial z}(xy) = 0.$$

Der Rand ∂G auf der rechten Seite des Gaußschen Satzes setzt sich aus vier Teilflächen zusammen: Eine ist die ellipsoidförmige Fläche F, durch die der Fluss $\int_F \mathbf{K} \cdot \vec{\mathbf{n}} \, d\omega$ gesucht ist; bei den anderen Teilflächen ist enweder $x = 0$, $y = 0$ oder $z = 0$. Auf der Teilfläche F_1 mit $x = 0$ gilt $\mathbf{K} = (yz, 0, 0)$, und die nach aussen gerichtete Normale auf dieser Fläche ist $\vec{\mathbf{n}} = (-1, 0, 0)$. Also ist $\mathbf{K} \cdot \vec{\mathbf{n}} = -yz$, und

$$\int_{F_1} \mathbf{K} \cdot \vec{\mathbf{n}} \, d\omega = \int_{y=0}^{b} \int_{z=0}^{c \cdot \sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}} -yz \; dz \, dy = \int_{y=0}^{b} -y \cdot c^2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}{2} \; dy = -\frac{b^2c^2}{8} \,.$$

Analog berechnet man den Fluss durch die anderen beiden Flächen mit $y = 0$ bzw. $z = 0$. Der Satz von Gauss impliziert also

$$0 = \int_G \operatorname{div} \mathbf{K} \; d\mu(x,y,z) = \int_F \mathbf{K} \cdot \vec{\mathbf{n}} \; d\omega - \frac{b^2c^2}{8} - \frac{c^2a^2}{8} - \frac{a^2b^2}{8}$$
$$\Rightarrow \int_F \mathbf{K} \cdot \vec{\mathbf{n}} \; d\omega = \frac{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}{8}.$$

Alternativer Lösungsweg mittels direkter Integration: Gesucht ist das Integral

$$\int_F \begin{pmatrix} yz \\ zx \\ xy \end{pmatrix} \cdot d\vec{\omega},$$

wobei $F = \left\{(x,y,z) \,:\, \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1;\, x,y,z \ge 0\right\}$.

Die Punkte $\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right)$ liegen auf dem positiven Oktanten der Einheitssphäre. Wir wählen daher folgende Parametrisierung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(\phi,\theta) \\ y(\phi,\theta) \\ z(\phi,\theta) \end{pmatrix} = \vec{f}(\phi,\theta) = \begin{pmatrix} a\cos\theta\cos\phi \\ b\cos\theta\sin\phi \\ c\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \phi \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right], \, \theta \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right].$$

Damit erhalten wir das vektorielle Flächenelement

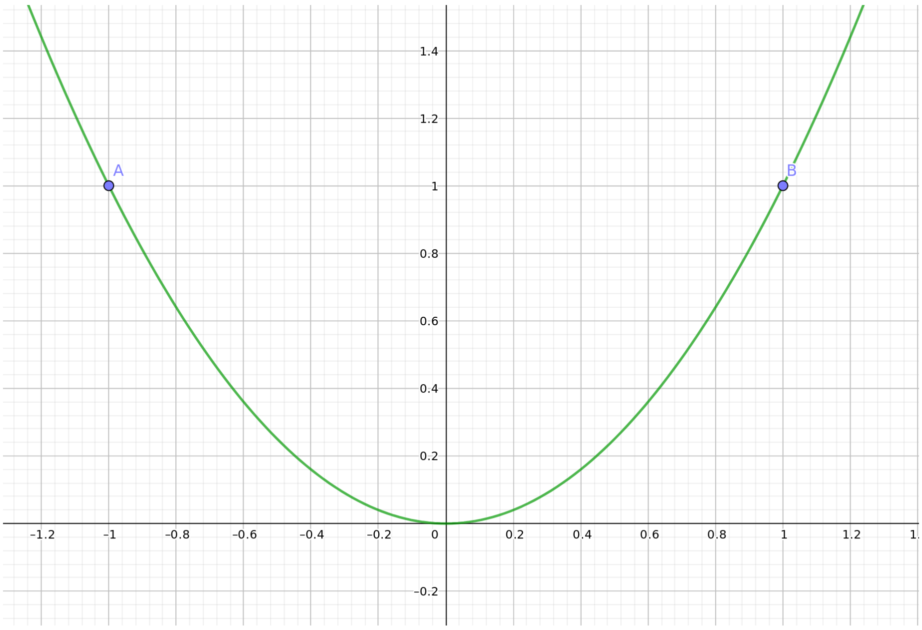
$$
\begin{aligned}
d\vec{\omega} &= \frac{\partial \vec{f}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial \theta}\, d\phi\, d\theta \\
&= \begin{pmatrix} -a\cos\theta\sin\phi \\ b\cos\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a\sin\theta\cos\phi \\ -b\sin\theta\sin\phi \\ c\cos\theta \end{pmatrix} d\phi\, d\theta \\
&= \begin{pmatrix} bc\cos^2\theta\cos\phi \\ ac\cos^2\theta\sin\phi \\ ab\cos\theta\sin\theta \end{pmatrix} d\phi\, d\theta.
\end{aligned}
$$

Dieser Vektor ist nach aussen gerichtet, da für $\phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ und $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ die Komponenten nicht negativ sind. Der Fluss durch F ist

$$
\begin{aligned}
&\int_F \begin{pmatrix} yz \\ zx \\ xy \end{pmatrix} \cdot d\vec{\omega} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} bc\cos\theta\sin\theta\sin\phi \\ ac\cos\theta\sin\theta\cos\phi \\ ab\cos^2\theta\cos\phi\sin\phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} bc\cos^2\theta\cos\phi \\ ac\cos^2\theta\sin\phi \\ ab\cos\theta\sin\theta \end{pmatrix} d\phi\, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2\right) \cos^3\theta\sin\theta\cos\phi\sin\phi\ d\phi\, d\theta \\
&= \left((bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi\sin\phi\ d\phi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\sin\theta\ d\theta \\
&= \left((bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2\right) \cdot \left[\frac{\sin^2\phi}{2}\right]\Bigg|_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[-\frac{\cos^4\theta}{4}\right]\Bigg|_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}{8}.
\end{aligned}
$$

12.2. Integralsätze in $\mathbb{R}^3$ I

(a) Die Menge M ist ein Rotationskörper zu der Funktion $z \mapsto \sqrt{z}$, G ist abgeschnitten auf der Höhe $z = 1$. Die folgende Skizze zeigt einen Querschnitt in der $x-z$-Ebene, die Punkte A und B sind Randpunkte von G



(b) Wir parametrisieren G als Graph über der Einheitskreisschreibe:

$$\psi : \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, u^2+v^2 \leq 1\} \to M, \qquad \psi(u,v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2+v^2 \end{pmatrix}$$

Das dazugehörige Flächenelement ist definiert durch

$$d\omega = ||\partial_u \psi(u,v) \times \partial_v \psi(u,v)||\, dudv$$

In unserem Fall gilt

$$\partial_u \psi(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix}, \qquad \partial_v \psi(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix}$$

sowie

$$\partial_u \psi(u,v) \times \partial_v \psi(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das Kreuzprodukt liefert ein Normalenvektorfeld auf M. Da es in die gleiche Richtung wie ν zeigt, folgt

$$\mathbf{n}(\psi(u,v)) = \frac{\partial_u \psi(u,v) \times \partial_v \psi(u,v)}{||\partial_u \psi(u,v) \times \partial_v \psi(u,v)||}.$$

Insgesammt erhalten wir also

$$\begin{aligned}
\int_G \mathbf{K}\cdot\mathbf{n}\,d\omega &= \int_{\{u^2+v^2\leq 1\}} \mathbf{K}(\psi(u,v))\cdot(\partial_u\psi(u,v)\times\partial_v\psi(u,v))\,dudv \\
&= \int_{\{u^2+v^2\leq 1\}} \begin{pmatrix} u^2+v^2 \\ u \\ v \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix} dudv \\
&= \int_{\{u^2+v^2\leq 1\}} (-2u(u^2+v^2)-2uv+v)\,dudv \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt benutzt, dass aus Symmetriegründen die Integrale über die jeweiligen Summanden verschwinden. Bspw. ist das Integral von $u(u^2+v^2)$ über die linke Hälfte mit $u<0$ genau das negative von seinem Integral über die rechte Hälfte mit $u>0$ und diese Werte haben sich gegenseitig auf.

(c) Wir sehen sofort, dass $\operatorname{div}(\mathbf{K})=0$, somit ist

$$\int_{\partial B} \mathbf{K}\cdot\mathbf{n}\,d\omega = \int_B \operatorname{div}(\mathbf{K})\,dx_1dx_2dx_3 = 0,$$

wobei

$$B = \{(x_1,x_2,x_3)\mid 0\leq x_3\leq 1,\ x_1^2+x_2^2\leq x_3\}.$$

∂B besteht somit einerseits aus der Mantelfläche G und andererseits aus der Grundfläche $S=\{(x_1,x_2,1)\mid x_1^2+x_2^2\leq 1\}$ mit Normalenvektor $\mathbf{n}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ und damit ist

$$\begin{aligned}
\int_G \mathbf{K}\cdot\mathbf{n}\,d\omega &= -\int_S \mathbf{K}\cdot\mathbf{n}\,d\omega \\
&= -\int_S \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\omega \\
&= -\int_S x_2\,d\omega = 0,
\end{aligned}$$

wobei wir widerum Symmetrie verwendet haben.

(d) Sei $\mathbf{K}(x_1,x_2,x_3)=(x_3,x_1,x_2)$ und betrachte die Gleichung $\operatorname{rot}(\mathbf{g})=\mathbf{K}$:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{g}) = \begin{pmatrix} \partial_{x_2}g_3-\partial_{x_3}g_2 \\ \partial_{x_3}g_1-\partial_{x_1}g_3 \\ \partial_{x_1}g_2-\partial_{x_2}g_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{K}$$

Diese Gleichungen hat viele Lösungen für $\mathbf{g}$ welche durch Raten gefunden werden können, z.B.

$$\mathbf{g}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_3x_1 \\ x_1x_2 \\ x_2x_3 \end{pmatrix}.$$

Wir parametrisieren den Einheitskreis $\{u^2 + v^2 = 1\}$ auf die übliche Art durch $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ und wenden anschliessend die Parametrisierung ψ wie in Teil b) an. Dies liefert die folgende Parametrisierung von ∂G

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \partial G, \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Parametrisierung ist kompatibel mit der Orientierung welche der Satz von Stokes vorgibt und es folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\partial G} \mathbf{g} \cdot \tau \, dS &= \int_0^{2\pi} \mathbf{g}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t)\sin(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-\cos(t)\sin(t) + \cos^2(t)\sin(t)) \, dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir wiederum benutzt, dass aus Symmetriegründen alle Integranden jeweils zu Null integrieren.

12.3. Integralsätze in $\mathbb{R}^3$ II

(a) Wir parametrisieren B, analog zur Sphäre, durch

$$(\phi, \theta) \mapsto T(\phi, \theta) = \begin{pmatrix} x(\phi, \theta) \\ y(\phi, \theta) \\ z(\phi, \theta) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\phi \\ R\cos\theta\sin\phi \\ R\sin\theta \end{pmatrix}$$

mit $\phi \in [0, 2\pi)$ and $\theta \in \left[\theta_0, \frac{\pi}{2}\right]$, wobei der Winkel θ_0 der Winkel der "Abschneidehöhe" bezeichnet. Es muss gelten

$$x^2 + y^2 = R^2\cos^2\theta_0\cos^2\phi + R^2\cos^2\theta_0\sin^2\phi = R^2\cos^2\theta_0 = \frac{d^2}{4}$$

und es folgt

$$\cos^2\theta_0 = \frac{d^2}{4R^2}\,.$$

Mit dieser Parametrisierung ist das vektorielle Flächenelement

$$\begin{aligned} d\vec{\omega} &= \frac{\partial T}{\partial \phi} \times \frac{\partial T}{\partial \theta}\, d\phi\, d\theta = \begin{pmatrix} -R\cos\theta\sin\phi \\ R\cos\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R\sin\theta\cos\phi \\ -R\sin\theta\sin\phi \\ R\cos\theta \end{pmatrix} d\phi\, d\theta \\ &= \begin{pmatrix} R^2\cos^2\theta\cos\phi \\ R^2\cos^2\theta\sin\phi \\ R^2\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} d\phi\, d\theta \end{aligned}$$

tatsächlich nach aussen orientiert, wie verlangt. Es gilt

$$v = \operatorname{rot} F = \operatorname{rot}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Der Fluss des Vektorfeldes v durch die Oberfläche B des Ballons von innen nach aussen ist

$$\begin{aligned} \int_B v\cdot d\vec{\omega} &= \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} 2R^2\sin\theta\cos\theta\, d\phi\, d\theta \\ &= 2\pi R^2 \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta \\ &= 2\pi R^2 \Big[-\cos^2\theta\Big]_{\theta=\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\pi R^2\cos^2\theta_0 = 2\pi R^2\cdot\frac{d^2}{4R^2} = \frac{\pi d^2}{2}. \end{aligned}$$

(b) Sei D der kreisförmige "Deckel", der den Ballon verschliesst, und sei G das Innere der durch $B\cup D$ gebildeten geschlossenen Fläche. Der Gausssche Integralsatz besagt:

$$\int_B v\cdot d\vec{\omega} + \int_D v\cdot d\vec{\omega} = \int_{B\cup D} v\cdot d\vec{\omega} = \int_G \operatorname{div} v\, d\mu = \int_G \operatorname{div}\operatorname{rot} F\; d\mu = 0\,.$$

Um den Fluss durch den "Deckel" D zu berechnen, betrachten wir die Parametrisierung

$$(\phi, r) \mapsto T(\phi, r) = \begin{pmatrix} x(\phi,r) \\ y(\phi,r) \\ z(\phi,r) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \\ z_0 \end{pmatrix}$$

mit $\phi \in [0, 2\pi)$ und $r \in \left[0, \frac{d}{2}\right]$, wobei $z_0 = R\sin\theta_0$ die "Abschneidehöhe" bezeichnet. Deren vektorielles Flächenelement

$$\begin{aligned} d\vec{\omega} &= \frac{\partial T}{\partial \phi} \times \frac{\partial T}{\partial r}\, d\phi\, dr = \begin{pmatrix} -r\sin\phi \\ r\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} d\phi\, dr \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r\sin^2\phi - r\cos^2\phi \end{pmatrix} d\phi\, dr = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} d\phi\, dr \end{aligned}$$

ist ebenfalls auf den Gesamtballon bezogen nach aussen gerichtet, wie es sein muss. Für den Fluss des Vektorfeldes v durch D erhalten wir somit

$$\begin{aligned} \int_D v \cdot d\vec{\omega} &= \int_0^{\frac{d}{2}} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} d\phi\, dr = \int_0^{\frac{d}{2}} \int_0^{2\pi} -2r\, d\phi\, dr \\ &= -4\pi \int_0^{\frac{d}{2}} r\, dr = -4\pi \left.\frac{r^2}{2}\right|_{r=0}^{\frac{d}{2}} \\ &= \frac{-4\pi d^2}{8} = -\frac{\pi d^2}{2}. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Gauss ist der Fluss des Vektorfeldes v durch D *und* den Ballon B gleich 0. Folglich erhalten wir für den Fluss durch den Ballon

$$\int_B v \cdot d\vec{\omega} = -\int_D v \cdot d\vec{\omega} = \frac{\pi d^2}{2}.$$

(c) Da $v = \operatorname{rot} F$ gilt, bietet sich auch der Satz von Stokes zur Berechnung des Flusses durch B an. Sei γ die geschlossene Kurve, die B berandet. Der Satz von Stokes besagt:

$$\int_B \operatorname{rot} F \cdot d\vec{\omega} = \int_\gamma F \cdot dx.$$

Für γ wählen wir die Parametrisierung

$$t \mapsto \gamma(t) := \begin{pmatrix} \frac{d}{2}\cos t \\ \frac{d}{2}\sin t \\ z_0 \end{pmatrix}$$

mit $t \in [0\,,\, 2\pi)$, wobei $z_0 = R\sin\theta_0$ die "Abschneidehöhe" bezeichnet.

Diese Parametrisierung von γ umläuft die Ballonoberfläche im mathematisch positiven Sinn, d. h. wir werden am Ende der Rechnung das richtige Vorzeichen erhalten. Der

Fluss berechnet sich folglich zu

$$\begin{aligned}
\int_B v \cdot d\vec{\omega} &= \int_B \operatorname{rot} F \cdot d\vec{\omega} = \int_\gamma F \cdot dx = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\frac{d}{2}\sin t \\ \frac{d}{2}\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{d}{2}\sin t \\ \frac{d}{2}\cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{d^2}{4}\, dt = \frac{\pi d^2}{2}.
\end{aligned}$$

12.4. Kochhut

(a) Wir suchen also ein Vektorfeld $\mathbf{F}$, so dass $\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{K}$ ist. Es gibt unendlich viele $\mathbf{F}$, die dies erfüllen, eines ist beispielsweise

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 + y^2 \\ e^{xyz} \end{pmatrix}.$$

(b) Da keine Parametrisierung des Kochhutes gegeben ist, sind wir gezwungen, den Satz von Stokes zu verwenden, um das Ganze als Linienintegral über die Randkurve γ_1 zu berechnen. (Die Kurve γ_2 hat für die Berechnung dieser Aufgabe keine Bedeutung.) Wir nutzen $\mathbf{F}$, wie in a) berechnet, so dass $\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{K}$. Ein anderes $\mathbf{F}$ ergäbe einen analogen Lösungsweg und die selbe Lösung.

Wir parametrisieren die Kurve γ_1 durch $\varphi \mapsto (5\cos\varphi, 5\sin\varphi, 0)$ mit $\dot{\gamma}_1 = (-5\sin\varphi, 5\cos\varphi, 0)$. Mit Stokes erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
\int_S \mathbf{K} \cdot d\omega &= \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 5^2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5\sin\varphi \\ 5\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} 5^3 \cos\varphi\, d\varphi = 0.
\end{aligned}$$