13.1. Linienintegral

(a) Wir parametrisieren γ' durch $\gamma'\colon \varphi \mapsto (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$ mit $\dot{\gamma}' = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann ist

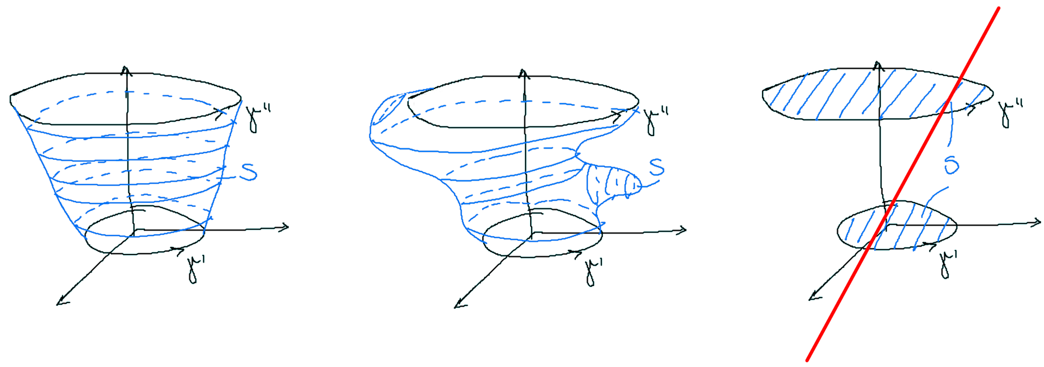
$$(\mathbf{K} \circ \gamma') \cdot \dot{\gamma}' = \begin{pmatrix} 2\sin\varphi \\ -2\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = -2$$

und damit $\int_{\gamma'} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z} = \int_0^{2\pi} (-2)\, d\varphi = -4\pi$.

(b) Eine Möglichkeit wäre, analog wie in a) $\int_{\gamma''} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z}$ zu berechnen. Wir benutzen stattdessen Stokes. Es ist $\mathbf{rot}(\mathbf{K}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und wir können eine Oberfläche S finden, welche γ' und γ'' verbindet, so dass $\partial S = \gamma' - \gamma''$. Dann ist

$$0 = \int_S \mathbf{rot}(\mathbf{K}) = \int_{\gamma'} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z} - \int_{\gamma''} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z}.$$

Die folgende Graphik zeigt bei 1 die naheliegende Wahl einer Fläche S, bei 2 eine weitere zulässige Möglichkeit und bei 3 eine nicht zulässige Wahl von S, weil dort die z-Achse gekreuzt wird.



1 2 3

13.2. Potential

Ein Potential ist immer nur bis auf Konstanten eindeutig. Man kann also stets eine Konstante addieren und kriegt ein anderes Potential zum gleichen Vektorfeld.

(a) Es gilt $\frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y) - \frac{\partial}{\partial y}(e^x \sin y) = 0$ und deswegen existiert ein Potential. Dieses können wir folgendermassen berechnen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \sin y \quad \Rightarrow \quad f = e^x \sin y + C(y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^x \cos y \quad \Rightarrow \quad f = e^x \sin y + B(x).$$

Wir können also $f(x, y) = e^x \sin y$ als Potential nehmen.

(b) Es existiert kein Potential, denn $\mathbf{rot}(\mathbf{K}) \neq 0$. Dies sehen wir z.B. bei

$$\frac{\partial K_1}{\partial z} - \frac{\partial K_3}{\partial x} = -x \neq 0.$$

(c) Man kann nachrechnen, dass $\mathbf{rot}(\mathbf{K}) = 0$, damit existiert also ein Potential. Dieses berechnen wir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 2xyz \quad \Rightarrow \quad f = x^4 + x^2yz + A(y, z),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2z + 2yz^2 \quad \Rightarrow \quad f = x^2yz + y^2z^2 + B(x, z),$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^2y + 2y^2z \quad \Rightarrow \quad f = x^2yz + y^2z^2 + C(x, y).$$

Dies passt zusammen, wenn wir z.B. $A = y^2z^2$, $B = x^4$ und $C = x^4$ setzen und wir können dann $f(x, y, z) = x^4 + x^2yz + y^2z^2$ als Potential verwenden.

(d) Wir berechnen die Rotation, um zu bestimmen, für welche α, β, γ ein Potential existiert.

$$\mathbf{rot}(\mathbf{K}) = \begin{pmatrix} \gamma + 1 \\ \alpha - 4 \\ \beta - 2 \end{pmatrix}.$$

Dies ist der Nullvektor, genau dann wenn $\alpha = 4$, $\beta = 2$, $\gamma = -1$. Es gibt also genau eine Möglichkeit, α, β und γ zu bestimmen. Wir berechnen in diesem Fall das

Potential:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= x + 2y + 4z &&\Rightarrow\quad f = \frac{1}{2}x^2 + 2xy + 4xz + A(y,z),\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 2x - 3y - z &&\Rightarrow\quad f = 2xy - \frac{3}{2}y^2 - yz + B(x,z),\\
\frac{\partial f}{\partial z} &= 4x - y + 2z &&\Rightarrow\quad f = 4xz - yz + z^2 + C(x,y).
\end{aligned}$$

Ein Potential ist dann $f(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + 2xy + 4xz - \frac{3}{2}y^2 - yz + z^2$.

13.3. Stokes

(a) γ besteht aus drei Teilstücken, welche sich folgendermassen parametrisieren lassen:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &: t \mapsto (1-t, t, 0), \quad t \in [0,1],\\
\gamma_2 &: t \mapsto (0, 1-t, t), \quad t \in [0,1],\\
\gamma_3 &: t \mapsto (t, 0, 1-t), \quad t \in [0,1].
\end{aligned}$$

Die jeweiligen Tangentialvektoren sind

$$\dot\gamma_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot\gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \dot\gamma_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} \mathbf{K} &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 1-t-t \\ t+1-t \\ -1+t+t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 2t\,dt = 1,\\
\int_{\gamma_2} \mathbf{K} &= \int_0^1 \begin{pmatrix} -1+t+t \\ 1-t-t \\ 1-t+t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 2t\,dt = 1,\\
\int_{\gamma_3} \mathbf{K} &= \int_0^1 \begin{pmatrix} t+1-t \\ -1+t+t \\ 1-t-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 2t\,dt = 1.
\end{aligned}$$

Total also $\int_\gamma \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z} = 3$.

(b) Es sei D das von γ umschlossene, grau markierte Dreieck. Um Stokes darauf anwenden zu können berechnen wir

$$\mathbf{rot}(\mathbf{K}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Der mit der Rotationsrichtung verträgliche Einheitsnormalenvektor ist in jedem Punkt von D gegeben durch $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und damit ist $\mathbf{n} \cdot \mathbf{K} = 2\sqrt{3}$. Es gilt also

$$\int_D \mathrm{K} \cdot d\omega = 2\sqrt{3}\,\mathrm{Vol}(D) = 3,$$

wobei wir verwenden, dass der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge $\sqrt{2}$ gegeben ist durch $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

13.4. Rotationskörper

(a) Nach der bekannten Formel für das Volumen eines Rotationskörpers gilt

$$\mathrm{Vol}(V) = \pi \int_0^1 y^2 \, dy = \frac{\pi}{3}.$$

(b) Aufgrund der Struktur des Rotationskörpers können wir V mit folgenden zylinderähnlichen Koordinaten parametrisieren

$$\begin{aligned} \Phi \colon [0,1] \times [0,1] \times [0,2\pi] &\to \mathbb{R}^3 \\ (y, r, \varphi) &\mapsto (yr\cos\varphi, y, yr\sin\varphi). \end{aligned}$$

Wir berechnen die Jacobideterminante und nutzen dabei Entwicklung nach der Zeile, in der zwei 0 stehen:

$$\begin{aligned} \det d\Phi &= \det \begin{pmatrix} r\cos\varphi & y\cos\varphi & -yr\sin\varphi \\ 1 & 0 & 0 \\ r\sin\varphi & y\sin\varphi & yr\cos\varphi \end{pmatrix} \\ &= -1 \det \begin{pmatrix} y\cos\varphi & -yr\sin\varphi \\ y\sin\varphi & yr\cos\varphi \end{pmatrix} = -y^2 r. \end{aligned}$$

Das Integral von f über V ist also

$$\int_V \frac{2}{y} \, d\mu(x,y,z) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{2}{y} y^2 r \, d\varphi dr dy = 4\pi \left(\int_0^1 y \, dy \right) \left(\int_0^1 r \, dr \right) = \pi.$$

(c) Die Randfläche ∂V besteht aus zwei Teilen, nämlich dem Mantel M, wo in obiger Parametrisierung $r = 1$ und das Schlussstück S, wo $y = 1$. Betrachten wir zuerst den Mantel M, haben wir also die Parametrisierung

$$\Psi_M \colon (y, \varphi) \mapsto (y\cos\varphi, y, y\sin\varphi).$$

Für den Normalenvektor berechnen wir

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \Psi_M}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Psi_M}{\partial y} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ 1 \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -y\sin\varphi \\ 0 \\ y\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y\cos\varphi \\ -y \\ y\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Als nächstes berechnen wir das Skalarprodukt des Normalenvektors mit dem Vektorfeld $\mathbf{K}$:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{K} \circ \Psi_M) = \begin{pmatrix} y\cos\varphi \\ -y \\ y\sin\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi - \sin\varphi \\ 1 \\ \cos\varphi + \sin\varphi \end{pmatrix} = 0.$$

Der Fluss durch die Mantelfläche verschwindet also. (Wäre das Skalarprodukt nicht 0, hätten wir uns auch noch überlegen müssen, ob $\mathbf{n}$ in die richtige Richtung zeigt.)

Dann müssen wir noch den Fluss durch S berechnen. Der nach aussen weisende Einheitsnormalenvektor ist gegeben durch $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und es gilt

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{K} = 1.$$

Der Fluss durch S entspricht damit genau der Fläche von S und diese ist π. Insgesamt haben wir also

$$\int_{\partial V} \mathbf{K} \cdot d\omega = \pi.$$

(d) Die Aufgaben b) und c) ergeben dasselbe Resultat. Dies liegt daran, dass $\operatorname{div}(\mathbf{K}) = f$ und wir damit eine Anwendung des Satzes von Gauss sehen.

13.5. Wirbelfrei vs. exakte Differentialgleichung

(a) Ein mögliches Potential ist gegeben durch $\Phi(x, y) = y^2(e^x + 1)$.

(b) Lösungen der Differentialgleichung $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ sind gegeben durch $\Phi(x, y(x)) \equiv C$ für eine beliebige Konstante C. Wir müssen also die Gleichung $\Phi = C$ nach y auflösen. Dies ergibt $y^2 = \frac{C}{e^x+1}$ und dann $y = \pm\sqrt{\frac{C}{e^x+1}}$. Dies macht natürlich nur Sinn, wenn $C \geq 0$ ist, zu $C < 0$ gibt es keine Lösungen. Setzen wir $y(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ein, sehen wir, dass wir das positive Vorzeichen brauchen und $C = 1$. Dies ergibt insgesamt

$$y(x) = \sqrt{\frac{1}{e^x + 1}}.$$

Bemerkung: Warum sind Lösungen von $\Phi \equiv C$ Lösungen der Differentialgleichung? Sei dazu $y(x)$ Funktion, welche erfüllt, dass $\Phi(x, y(x)) \equiv C$ (für alle x in einer geeigneten Umgebung). Wir leiten diese Gleichung nach x ab und kriegen mit der mehrdimensionalen Kettenregel

$$0 = \frac{d}{dx} C = \frac{d}{dx} \Phi(x, y(x)) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y(x)) \frac{dy}{dx}.$$

Da Φ ein Potential ist, gilt $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q$ und dann sehen wir genau die ursprüngliche Differentialgleichung.