Version A

Gegeben sei das Integral

$$\int \frac{x^{17} + \pi x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx.$$

Welches der folgenden ist eine korrekte Aussage bezüglich der Frage, wie man mit dem Integrieren beginnen könnte?

(a) Wenn man mit $s = 1 - x^2$ substituiert, dann kürzt sich fast alles und was bleibt, ist ein Polynom.

(b) Nach 17-maliger partieller Integration ist das Integral gelöst.

(c) Wenn man mit $y = \sqrt{1-x^2}$ substituiert, so bleibt eine rationale Funktion.

(d) Wenn man mit $x = \sin(t)$ substituiert, dann ergibt sich eine rationale Funktion in cos und sin.

Korrekt ist: (d)

Begründung: Substitution mit $s = 1 - x^2$ ergibt

$$\int \frac{-\frac{1}{2}(1-s^2)^8 - \frac{\pi}{2}\sqrt{1-s}}{s^{\frac{3}{2}}}\, ds.$$

Das ist zwar besser als vorher, weil die Wurzel aus dem Nenner verschwunden ist, aber ein Polynom ist es nicht. a) ist also falsch.

17-mal partiell integrieren wird nicht funktionieren. Das sieht man daran, dass $\int \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, nach der ersten Anwendung von partieller Integration ist der Grad des Polynoms im Zähler nicht gesunken. b) ist also falsch.

Führt man die Substitution $y = \sqrt{1-x^2}$ aus, so ergibt sich

$$\int \frac{(1-y^2)^{\frac{17}{2}} + \pi(1-y^2)}{y^3} \frac{-y}{\sqrt{1-y^2}}\, dy.$$

Hier kürzen sich nicht alle Wurzeln weg, das heisst dies ist keine rationale Funktion. c) ist also falsch.

Mit der Substitution $x = \sin(t)$ ergibt sich

$$\int \frac{\sin^{17}(t) + \pi \sin^2(t)}{\cos^2(t)}\, dt.$$

Das ist wie behauptet eine rationale Funktion in cos und sin und damit könnte man theoretisch weiterrechnen (obwohl dies ein bisschen mühsam würde wegen dem hohen Grad). Antwort d) ist also korrekt.

Version B

Gegeben sei das Integral

$$\int \frac{\frac{1}{11}x^{11} + x^4}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}\, dx.$$

Welches der folgenden ist eine korrekte Aussage bezüglich der Frage, wie man mit dem Integrieren beginnen könnte?

(a) Wenn man mit $s = 1 - x^2$ substituiert, dann kürzt sich fast alles und was bleibt, ist ein Polynom.

(b) Wenn man mit $x = \sin(t)$ substituiert, dann ergibt sich eine rationale Funktion in cos und sin.

(c) Nach 11-maliger partieller Integration ist das Integral gelöst.

(d) Wenn man mit $y = \sqrt{1 - x^2}$ substituiert, dann bleibt eine rationale Funktion.

Korrekt ist: (b)

Begründung: Substitution mit $s = 1 - x^2$ ergibt

$$\int \frac{-\frac{1}{22}(1-s^2)^5 - \frac{1}{2}(1-s)^{\frac{3}{2}}}{s^{\frac{5}{2}}}\, ds.$$

Das ist zwar besser als vorher, weil die Wurzel aus dem Nenner verschwunden ist, aber ein Polynom ist es nicht. a) ist also falsch.

Mit der Substitution $x = \sin(t)$ ergibt sich

$$\int \frac{\frac{1}{11}\sin^{11}(t) + \sin^4(t)}{\cos^4(t)}\, dt.$$

Das ist wie behauptet eine rationale Funktion in cos und sin und damit könnte man theoretisch weiterrechnen (obwohl dies ein bisschen mühsam würde wegen dem hohen Grad). Antwort b) ist also korrekt.

11-mal partiell integrieren wird nicht funktionieren. Das sieht man daran, dass $\int \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}\, dx = \frac{-x(2x^2-3)}{3(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, nach der ersten Anwendung von partieller Integration ist der Grad des Polynoms im Zähler nicht gesunken. c) ist also falsch.

Führt man die Substitution $y = \sqrt{1-x^2}$ aus, so ergibt sich

$$\int \frac{\frac{1}{11}(1-y^2)^{\frac{11}{2}} + (1-y^2)^2}{y^5} \frac{-y}{\sqrt{1-y^2}}\, dy.$$

Hier kürzen sich nicht alle Wurzeln weg, das heisst dies ist keine rationale Funktion. c) ist also falsch.