### 1.1. Separation der Variablen

Lösen Sie die folgenden Aufgaben mithilfe von Separation der Variablen

**(a)** $y' = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$,

**(b)** $y\,y' - (1+y)x^2 = 0$,

*Hinweis:* Es reicht, wenn Sie bei b) eine Gleichung finden, die $y$ und $x$ in Beziehung setzt, Sie müssen diese nicht auflösen.

**(c)** $\begin{cases} y' - xy^2 = x, \\ \quad y(0) = 1. \end{cases}$

### 1.2. Variation der Konstanten I

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen, indem Sie zuerst eine homogene Lösung finden und dann Variation der Konstanten anwenden.

**(a)** $y' - 3y = e^{5x}$,

**(b)** $y' - 3y = e^{3x}$,

**(c)** $y' - y = \sin x$,

**(d)** $y' - \frac{y}{x} = x$.

### 1.3. Variation der Konstanten II

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen, indem Sie zuerst eine homogene Lösung finden und dann Variation der Konstanten anwenden.

**(a)** $y'' + y' - 6y = 4e^x$,

**(b)** $y'' - y = \frac{1}{\cosh(x)}$.

### 1.4. Exakte Differentialgleichung ★

Wir betrachten die folgende Differentialgleichung:

$$y + \left(x + \frac{2}{y}\right) y' = 0.$$

**(a)** Zeigen Sie, dass dies eine exakte Differentialgleichung ist und berechnen Sie ein Potential.

*Erinnerung:* Ein Potential zu einer Differentialgleichung der Form $y'q(x,y) + p(x,y) = 0$ ist eine Funktion $\Phi(x,y)$ mit $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = p$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = q$.

**(b)** Leiten Sie mithilfe dieses Potentials Gleichungen her, welche die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichung erfüllen.

**(c)** Welches ist die Gleichung zum Anfangswert $y(0) = e$?

### 1.5. Online-Aufgaben

**Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben:** Online bis 27.2. 20:00.

**Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.**

**(a)** Sei $a > 0$, $b, c \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Differentialgleichungen hat/haben im Allgemeinen genau eine Lösung?

**(i)** $\begin{cases} ay' + by = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

**(ii)** $\begin{cases} ay'' + by' + cy = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

**(iii)** $\begin{cases} ay' + by = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2. \end{cases}$

**(iv)** $\begin{cases} ay'' + by' + cy = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2. \end{cases}$

**(b)** Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\begin{cases} y' = \sin(x)e^y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Welche der folgenden Integralgleichungen ist/sind äquivalent zu dieser Differentialgleichung?

**(i)** $\xi(\tau) \equiv \int_0^\tau \sin(s)e^{\xi(s)}\,ds.$

**(ii)** $\xi(\tau) \equiv 1 + \int_0^\tau \sin(s)e^{\xi(s)}\,ds.$

**(iii)** $\xi(\tau) \equiv 1 + e\int_0^\tau \sin(s)e^{\xi(s)}\,ds.$

**(iv)** $\xi(\tau) \equiv e\int_0^\tau \sin(s)e^{\xi(s)}\,ds.$