2.1. Norm und Skalarprodukt

Sei V die Menge der stetigen Funktionen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$.

(a) Man definiere $||f|| := \int_0^1 |f(t)|\,dt$. Prüfen Sie, dass $||\cdot||$ auf V eine Norm definiert.

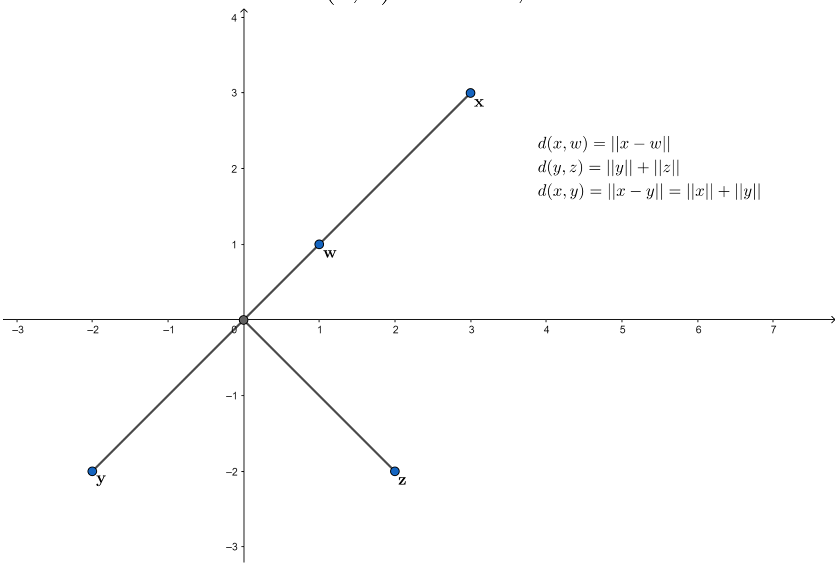
(b) Man definiere $\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$. Prüfen Sie, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf V ein Skalarprodukt definiert.

2.2. Französische Eisenbahnmetrik

Wir betrachten die Ebene $\mathbb{R}^2$ mit der *Französischen Eisenbahnmetrik*: Für $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \begin{cases} ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||_2 & \text{wenn } \mathbf{x}, \mathbf{y} \text{ und } (0,0) \text{ auf derselben Geraden liegen,} \\ ||\mathbf{x}||_2 + ||\mathbf{y}||_2 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei für $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ gilt $||\mathbf{x}||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.
Beachten Sie, dass die beiden Definitionen übereinstimmen, falls sich $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ zwar auf einer Gerade durch $(0, 0)$ befinden, aber auf verschiedenen Seiten des Nullpunkts.



(a) Verifizieren Sie, dass d eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Sei Y ein metrischer Raum (hier ist $Y = \mathbb{R}^2$). Wir sagen, dass zwei Metriken $d_1, d_2 \colon Y \times Y \to \mathbb{R}$ äquivalent sind, falls sie die gleichen konvergenten Folgen haben, d.h. wenn für alle Folgen $(y_n) \subset Y$ und $y \in Y$ gilt: $\lim_{n\to\infty} d_1(y_n, y) = 0$ genau dann wenn $\lim_{n\to\infty} d_2(y_n, y) = 0$. Zeigen Sie, dass das oben definierte d nicht äquivalent ist zur euklidschen Metrik $||\mathbf{x} - \mathbf{y}||_2 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$. Betrachten Sie dazu die Folge $\mathbf{x}_n = (2^{-n}, 1)$ und den Punkt $\mathbf{x} = (0, 1)$.

(c) ★ Warum heisst diese Metrik französische Eisenbahnmetrik? Was ist $(0, 0)$?

2.3. Die Produktmetrik

Es seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume. Auf dem Produkt $X := X_1 \times X_2$ werde eine Metrik definiert durch

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2))$$

für $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$.

Man zeige, dass $d : X \times X \to \mathbb{R}$ die Axiome einer Metrik erfüllt.

2.4. Stetigkeit

Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} |y/x^2| \cdot 2^{-|y/x^2|} & \text{wenn } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Einschränkung $f|_G$ auf jede Gerade G durch den Nullpunkt stetig auf G ist.

(b) Zeigen Sie, dass f trotzdem nicht stetig im Nullpunkt ist. Betrachten Sie dazu den Pfad entlang $y = x^2$.

Diese Aufgabe zeigt, dass Stetigkeit in mehreren Dimensionen nicht so einfach zu zeigen ist wie in einer Dimension: Wir müssen stets alle möglichen Pfade zu einem Punkt betrachten. In einer Dimension haben wir mit den Pfaden aus positiver und aus negativer Richtung bereits alle, die wir brauchen. In mehreren Dimensionen reichen die Pfade entlang Geraden aber nicht aus, da sich die Funktion entlang gekrümmter Pfade noch immer unstetig verhalten kann, wie dieses Beispiel zeigt.

2.5. Niveaumengen/Höhenlinien

Bestimmen und skizzieren Sie die Niveaumengen/Höhenlinien
der Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ zu den Werten $c = 1, \frac{1}{2}, 0$.

2.6. Äquivalenz von Normen auf $\mathbb{R}^n$

Sei $|| \cdot ||$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Sei U eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

(a) Formulieren Sie, was es bedeutet, dass U offen ist bezüglich $||\cdot||$.

(b) Prüfen Sie Folgendes nach: U ist offen (übliche Definition) genau dann wenn U offen ist bezüglich $||\cdot||$.

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

(c) Formulieren Sie, was es bedeutet, dass f stetig ist bezüglich der Norm $||\cdot||$.

(d) Prüfen Sie Folgendes nach: Die Funktion f ist stetig (übliche Definition) genau dann wenn f stetig ist bezüglich $||\cdot||$.

2.7. Online-Aufgaben

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Sei $Q := (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$. Q ist

i) offen

ii) abgeschlossen

iii) keine der vorherigen Antworten ist korrekt

(b) Sei $Q := (0,1) \times [0,1) \subset \mathbb{R}^2$. Q ist

i) offen

ii) abgeschlossen

iii) keine der vorherigen Antworten ist korrekt

(c) Welche der nachfolgenden geometrischen Objekte können als Einheitsball (die Menge aller Punkte p mit $||p|| \leq 1$) einer Norm $||\cdot||$ auf $\mathbb{R}^2$ auftreten?

i) Ein Punkt.

ii) Ein regelmässiges Dreieck.

iii) Ein regelmässiges Viereck.

iv) Ein regelmässiges Fünfeck.

Zusatzaufgabe zu c): Wie sieht es mit dem regelmässigen Sechseck aus?