4.1. Die Kettenregel

Sei $x(t) = \cos(\pi t)$ und $y(t)$ die Stammfunktion von e^{-t^2}, die an der Stelle $t = 1$ den Wert 42 annimmt. Weiterhin sei $f(x, y) = x^2 + y^2$. Berechnen Sie die Ableitung

$$\frac{d}{dt}\left(f\left(x(t), y(t)\right)\right)\Big|_{t=1}$$

der Funktion $t \mapsto f\left(x(t), y(t)\right)$ im Punkt $t = 1$.

4.2. Integraldarstellung des Funktionszuwachses

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion und $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Kurve mit $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$ für gewisse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Überzeugen Sie sich, dass gilt

$$f(b) - f(a) = \int_\alpha^\beta Df(x(t)) \cdot \dot{x}(t)\, dt = \int_\alpha^\beta \nabla f(x(t)) \cdot \dot{x}(t)\, dt.$$

Bemerkung: Die ist das Kurvenintegral des Differentials Df entlang der Kurve x. Vergleichen Sie mit Kapitel 6 und Aufgabe 12.5 aus Analysis I.

4.3. Satz von Schwarz

Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & (x, y) = (0, 0) \\ \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0). \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f eine C^1-Funktion auf $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die gemischten zweiten Ableitungen $\partial_{xy} f$ und $\partial_{yx} f$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ existieren und auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ stetig sind. Gilt $\partial_{xy} f = \partial_{yx} f$?

4.4. Taylor-Entwicklung

Man berechne die Taylorpolynome ersten und zweiten Grades der folgenden Funktionen um den angegebenen Punkt und approximiere damit den Funktionswert an den angegebenen Approximationspunkten. Vergleiche das Resultat mit den tatsächlichen Funktionswerten.

(a) $f(x, y) = e^x \sin y$ um $P = (0, \pi/2)$.
Approximationspunkt: $(0, \pi/2 + 1/4)$.

(b) $f(x, y) = e^{x/y}$ um $P = (1, 1)$,
Approximationspunkt: $(5/4, 1/2)$.

(c) Wie genau ist die Approximation der linearen Taylorentwicklung aus a) auf dem Ball $B_{1/4}(0, \pi/2)$? Bestimme eine Schranke für den entstehenden Fehler.

(d) Bestimme einen Radius r, so dass der Approximationsfehler der linearen Taylorentwicklung auf dem Ball $B_r(0, \pi/2)$ höchstens 10^{-4} beträgt.

4.5. Kritische Punkte Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf kritische Punkte und Extrema.

(a) $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$.

(b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$.

(c) $f(x, y) = (x - 1)e^{-(x^2+y^2)}$

(d) $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$

4.6. Online-Aufgaben

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Der Wert einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fällt am schnellsten in die Richtung

i) der minimalen partiellen Ableitung.

ii) entgegengesetzt zur maximalen partiellen Ableitung.

iii) des Gradienten.

iv) entgegengesetzt zum Gradienten.

v) orthogonal zum Gradienten.

(b) Sei $f(x, y) = \arctan(2x^2 + 3xy - 4y^2)$. Das Taylor Polynom erster Ordnung um den Punkt $(1, 1)$ ist

i) $\frac{\pi}{2} + \frac{7}{2}\Delta x - \Delta y$

ii) $\frac{\pi}{4} + \frac{7}{2}\Delta x - \frac{5}{2}\Delta y$

iii) $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\Delta x + \frac{3}{2}\Delta y$

(c) Sei $f(x, y) = (1 + y)e^x \sin(xy)$. Das Taylor Polynom dritter Ordung um den Punkt $(0, 0)$ ist

i) $\Delta x + \Delta y + \Delta x \Delta y + \Delta x^2 \Delta y + \Delta y^2 \Delta x$

ii) $1 + \Delta y + \Delta x \Delta y + \Delta x \Delta y^2$

iii) $\Delta x \Delta y + \Delta x^2 \Delta y + \Delta x \Delta y^2$