5.1. Implizite Funktion und ihre Ableitung

$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$F(x, y) = 4(x + y) - x^2 + 2y \arctan(y) - \log(y^2 + 1)$$

(a) Begründen Sie, dass die Lösungsmenge der Gleichung $F(x, y) = 0$ überall lokal der Graph einer Funktion $y = y(x)$ ist.

(b) Geben Sie die Ableitung y' an.

(c) Bestimmen Sie $y''(x)$ für die kritischen Punkte x von y.

5.2. Implizite Funktion II

Sei $L := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2(1 - x^2) - y^2 = 0\}$.

(a) Skizzieren Sie die Menge L.

(b) Für welche Punkte $(x_0, y_0) \in L$ lässt sich die Menge L lokal (d.h. in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0) \in L$) als Graph einer Funktion $y = \phi(x)$ darstellen?

5.3. Die Jacobi-Determinante

Die Abbildung

$$f : U \to \mathbb{R}^3 , \qquad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} := \mathbf{f}(\mathbf{x}) ,$$

für eine geeignete offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$y_i := \frac{x_i}{1 - x_1 - x_2 - x_3} , \qquad 1 \le i \le 3.$$

Berechnen Sie die Jacobi-Determinante $J_f(x)$.

5.4. Die Kettenregel

Wir betrachten die Abbildung

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 , \quad (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v \\ \frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}v \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix} ,$$

sowie die Projektion auf die (y, z)–Ebene

$$\Pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 , \quad (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} .$$

(a) Berechnen Sie die Funktionalmatrix von $\Pi \circ \mathbf{f}$ mittels expliziter Berechnung von $\Pi \circ \mathbf{f}$.

(b) Berechnen Sie nochmals diese Funktionalmatrix mit Hilfe der (mehrdimensionalen) Kettenregel.

(c) In welchen Punkten (u, v) ist $\Pi \circ \mathbf{f}$ nicht regulär?

5.5. Die Jacobi-Matrix II

Wir betrachten die Abbildungen

$$\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\,, \quad (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + e^y \\ x + y \\ y \end{pmatrix}$$

und

$$\beta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\,, \quad (u, v, w) \mapsto \begin{pmatrix} uv \\ w \end{pmatrix}.$$

Sei $\gamma = \beta \circ \alpha$. Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von γ.

5.6. Online-Aufgaben

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

i) Jede Funktion auf einer kompakten Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ besitzt ein Maximum.

ii) Jeder nichtausgeartete kritische Punkt ist ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum.

iii) Jedes lokale Minimum ist ein nichtausgearteter kritischer Punkt.

iv) Keine der obigen Aussagen ist korrekt.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion in der Klasse $C^2(\mathbb{R}^2)$ mit einem kritischen Punkt an der Stelle (x_0, y_0). Die Hessesche Matrix $H_m(x_0, y_0)$ ist

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Dann ist (x_0, y_0)

i) ein lokales Minimum von f.

ii) ein Sattelpunkt von f.

iii) ein lokales Maximum von f.

(c) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion in der Klasse $C^2(\mathbb{R}^2)$ mit einem kritischen Punkt an der Stelle $(0,0)$. Wir nehmen an, dass die Eigenwerte von $H_m(0,0)$ die Zahlen 3 und -2 sind. Dann ist $(0,0)$

i) ein lokales Minimum von f.

ii) ein Sattelpunkt von f.

iii) ein lokales Maximum von f.

iv) Man kann den Typ des kritischen Punktes nicht bestimmen.

(d) Für welche Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stimmen Jacobi- und Hessematrix überein?

i) Nur für die Identität.

ii) Für konstante Funktionen.

iii) Für jede Funktion der Form $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = A + Be^{x+y}$.

iv) Für keine.

(e) Definiere

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} \\ e^{x-y} \end{pmatrix}.$$

Die Jacobimatrix $\left[\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)}\right]$ ist

i)

$$\left[\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)}\right] = \begin{pmatrix} e^x & e^y \\ e^x & -e^y \end{pmatrix}.$$

ii)

$$\left[\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)}\right] = \begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ e^{x-y} & -e^{x-y} \end{pmatrix}.$$

(f) In welchen Punkten der u-v–Ebene ist die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 , \quad (u, v) \mapsto \left(u^2 + 2v, 2v^2 - u, u + v\right) ,$$

nicht regulär?

i) $u = -1$ und $v = \frac{1}{4}$.

ii) $u = 0$ und $v = 0$.

iii) $u = 1$ und $v = -\frac{1}{4}$.

iv) $u = 0$ und $v > 0$.

(g) Für jede stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x_0, y_0) = a$ und $f_y(x_0, y_0) \neq 0$ existiert eine lokale Parametrisierung $\varphi(x)$ mit $f(x, \varphi(x)) = a$ und $\varphi(x_0) = y_0$.

i) Diese Aussage folgt aus dem Satz über implizite Funktionen.

ii) Diese Aussage gilt nur für $a = 0$.

iii) Man muss in der Voraussetzung $f_x \neq 0$ verlangen anstatt $f_y \neq 0$.

iv) Man muss in der Voraussetzung zusätzlich $f_x \neq 0$ verlangen.