6.1. Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen

Bestimme die globalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 7x - 2y$$

auf dem Bereich $D = \{(x, y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ 3x + y \leq 3\}$.

Hinweis: Figur!

6.2. Parametrisierung einer Fläche I

Sei $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\mathbf{x}(u, v) := \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \\ v \end{pmatrix}, \tag{1}$$

(a) Fixiere $u = 0$ und skizziere die Kurve $v \mapsto \mathbf{x}(0, v)$.

(b) Wiederhole dies mit $u = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.

(c) Fixiere nun $v = 0$ und skizziere die Kurve $u \mapsto \mathbf{x}(u, 0)$.

(d) Wiederhole dies mit $v = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$.

Dies ist also offensichtlich eine Parametrisierung des Zylinders. Beachte, dass man den Zylinder auch schreiben kann als die Niveaumenge der Funktion $g(x, y, z) = x^2 + y^2$ zum Niveau $c = 1$.

6.3. Parametrisierung einer Fläche II

Die Abbildung $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$\mathbf{x}(u,v) := \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} [\,2+\cos(v)\,]\,\cos(u) \\ [\,2+\cos(v)\,]\,\sin(u) \\ \sin(v) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

beschreibt eine Fläche F im Raum.

(a) Skizzieren Sie ein Bild der Fläche F mittels einiger Koordinatenlinien.

(b) Zeigen Sie, dass die so definierte Fläche genau die Niveaumenge der Funktion $g(x,y,z) = \left(\sqrt{(x^2+y^2)} - 2\right)^2 + z^2$ zum Niveau $c = 1$ ist.

6.4. Die Methode der Lagrange-Multiplikatoren I

Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der Lagrange-Multiplikatoren das achsenparallele Rechteck größter Fläche, das sich in die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

einbeschreiben läßt.

Berechnen Sie die Fläche und vergleichen Sie mit der Fläche der Ellipse.

6.5. Die Methode der Lagrange-Multiplikatoren II

Finde das Maximum der Funktion $f(x,y,z) := x$ auf der durch die Gleichungen $F(x,y,z) = G(x,y,z) = 0$ definierten Kurve mit

$$F(x,y,z) := x^2+y^2+z^2-1 \quad \text{und} \quad G(x,y,z) := x^3+y^3+z^3.$$

Benutze dazu die Methode der Lagrange-Multiplikatoren.

Hinweis: Es ist nicht nötig, die Kurve selbst zu beschreiben oder zu parametrisieren.

6.6. Die Methode der Lagrange-Multiplikatoren III

Bestimme die globalen Extrema der Funktion

$$f(x, y, z) := x - y - z$$

auf der Schnittkurve des elliptischen Zylinders $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$ mit der Ebene $3x - 4z = 0$.

6.7. Online-Aufgaben

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Seien $f_1, f_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ zwei beliebig oft differenzierbare Funktionen. Unter welchen Umständen ist

$$E := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid f_1(x) = f_2(x) = 0\}$$

eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit?

i) Gar nie, denn dazu bräuchten wir mindestens noch eine dritte Funktion.

ii) Falls $E \neq \emptyset$ und $\nabla f_1(x)$ und $\nabla f_2(x)$ nie parallel sind für alle $x \in E$.

iii) Falls $E \neq \emptyset$ und $\nabla f_1(x)$ und $\nabla f_2(x)$ nie parallel sind für alle $x \in \mathbb{R}^4$.

iv) Da zwei Gleichungen die Dimension immer um zwei einschränken, ist dies in jedem Fall erfüllt, falls $E \neq \emptyset$.

v) Gar nicht, denn eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit muss immer Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ sein.