### 7.1. Mehrfachintegrale I

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

**(a)** $\displaystyle\int_1^3 \int_0^1 (\sqrt{y} + x - 3xy^2)\, dx\, dy$ ,

**(b)** $\displaystyle\int_{Q_b} \sin^2(x)\sin^2(y)\, d\mu(x,y), \quad$ wobei $Q_b = [0,\pi]^2$ ,

**(c)** $\displaystyle\int_{Q_c} (e^x + e^y)\, d\mu(x,y), \quad$ wobei $Q_c = [0,1]^2$ ,

**(d)** $\displaystyle\int_{Q_d} \sin(x+y+z)\, d\mu(x,y,z), \quad$ wobei $Q_d = [0,\pi]^3$ .

### 7.2. Fubini

**(a)** Prüfen Sie, dass $\int_0^1 (\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dx)\, dy$ und $\int_0^1 (\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dy)\, dx$ existieren, aber verschieden sind.

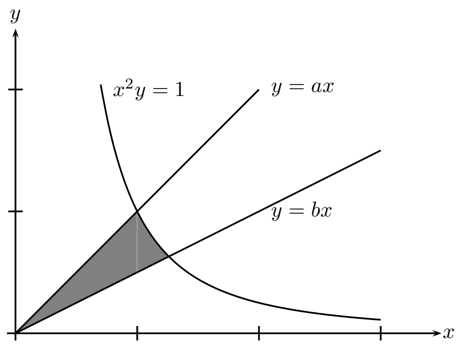
**(b)** Existiert $\int_0^1 (\int_0^1 \left|\frac{x-y}{(x+y)^3}\right| dx) dy$?

### 7.3. Mehrfachintegral II

**(a)** Seien $a, b > 0$ mit $a > b$. Wir betrachten die Menge

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0, bx < y < ax, x^2y < 1\right\} .$$

Schreiben Sie $E$ als $x$-einfachen Bereich.




**(b)** Berechnen Sie das Integral $\int_E xy\, dx\, dy$ für $E$ wie in Teilaufgabe a).

### 7.4. Mehrfachintegrale III

Vertauschen Sie in den folgenden Integralen die Integrationsreihenfolge:

**(a)** $\displaystyle\int_{-1}^{2}\left(\int_{-x}^{2-x^2} f(x,y)\,dy\right)dx$ ,

**(b)** $\displaystyle\int_{0}^{2}\left(\int_{y^3}^{4\sqrt{2y}} f(x,y)\,dx\right)dy$ .

### 7.5. Rotationskörper

**(a)** Sei $z_0 > 0$. Berechnen Sie das Volumen des Paraboloiden

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le z_0,\, x^2 + y^2 \le z\}$$

*Hinweis:* Zylinderkoordinaten

**(b)** Sei nun $f$ eine differenzierbare Funktion mit $f(z) > 0$, $a < b$ und

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \le z \le b,\, x^2 + y^2 \le f^2(z)\}.$$

Leiten Sie eine Formel für das Volumen von $K$ her. Vergleichen Sie auch mit Aufgabe 13.1. aus Analysis I.

### 7.6. Schwerpunkt

Der Schwerpunkt eines messbaren Körpers $K \subset \mathbb{R}^3$ mit positiven Volumen $\mathrm{vol}(K) > 0$ ist definiert als der Punkt $S := (s_x, s_y, s_z)$ mit den Koordinaten

$$s_x := \frac{1}{\mathrm{vol}(K)}\int_K x\,dxdydz \qquad s_y := \frac{1}{\mathrm{vol}(K)}\int_K y\,dxdydz, \qquad s_z := \frac{1}{\mathrm{vol}(K)}\int_K z\,dxdydz$$

**(a)** Berechnen Sie den Schwerpunkt des Simplex

$$\Delta^3 := \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \ge 0,\, y \ge 0,\, z \ge 0,\, x + y + z \le 1\Big\}$$

direkt, d.h. ohne Variablentransformation.

**(b)** Berechnen Sie den Schwerpunkt nochmals und verwenden Sie nun folgende Transformation:

$$\begin{aligned}&\Phi : [0,1] \to \Delta^3\\ &(u,v,w) \mapsto (u, v(1-u), w(1-u)(1-v)).\end{aligned}$$

**(c)** Verleichen Sie Vor- und Nachteile der beiden Methoden.

### 7.7. Online-Aufgaben

**Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.**

**(a)** Welches der folgenden Integrale ist NICHT gleich den anderen? Es ist das Integral

**i)** $\int_0^1 \int_0^x x \, dy dx$.

**ii)** $\int_0^1 \int_0^y x \, dx dy$.

**iii)** $\int_0^1 \int_0^y y \, dx dy$.

**iv)** $\int_0^1 \int_y^1 x \, dx dy$.

**(b)** Wir betrachten

$$K = \left\{ (x, y, z) : 1 \leq z \leq e, \; \sqrt{x^2 + y^2} \leq \log z \right\} .$$

Das Volumen von $K$ ist

$$V(K) = \int_1^e \left( \int_{A(z)} dx dy \right) dz$$

wobei

$$A(z) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq \log^2 z\}$$

ist. Sei zuletzt

$$B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} .$$

Dann kann man $V(K)$ auch schreiben als

**i)** $\int_B \left( e - e^{\sqrt{x^2+y^2}} \right) dx dy$.

**ii)** $\int_B e^{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$.

**iii)** $\int_0^1 \int_0^1 e^{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$.

**iv)** $\int_0^{2\pi} \int_0^1 (e - e^r) \, r \, dr d\phi$.