8.1. Das Volumen

Berechnen Sie das Volumen, welches vom Zylinder

$$x^2 + y^2 = 1\,,\ z \geq 0$$

und der Ebene

$$x + z = 1$$

eingeschlossen wird.

8.2. Der Zykloidenbogen

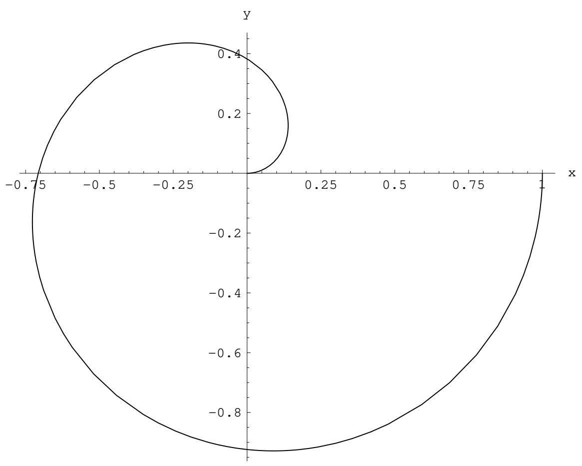
Sei $a > 0$. Ein Zykloidenbogen lässt sich folgendermassen parametrisieren:

$$t \mapsto \begin{pmatrix} x\,(t) \\ y\,(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at - a\sin t \\ a - a\cos t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi\,.$$

Berechnen Sie die Länge dieser Kurve.

8.3. Variablentransformation

In der xy-Ebene werde der Bereich B durch die Strecke von $(0, 0)$ nach $(1, 0)$ und dem Kurvenbogen mit der Polardarstellung $\varphi \mapsto (\sin\left(\frac{\varphi}{4}\right)\cos(\varphi), \sin\left(\frac{\varphi}{4}\right)\sin(\varphi))$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, begrenzt.



(a) Man berechne das Volumen des über dem Bereich B liegenden Teils der Einheitskugel $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

(b) Man berechne die Länge der Randkurve von B.

Hinweis: Es gilt $\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \frac{15}{16}\cos^2\left(\frac{\varphi}{4}\right)}\, d\varphi \approx 4.29$. (Dieses Integral lässt sich nur numerisch lösen.)

8.4. Oberflächenintegrale

Betrachten Sie nochmals den abgeschnittenen Zylinder aus Aufgabe 8.1.

(a) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Oberfläche des Körpers.

(b) Berechnen Sie das Integral der Funktion $f(x, y, z) = x$ über diese Oberfläche.

8.5. Der Flächeninhalt

Berechnen Sie die Oberfläche des Teils der oberen Hemisphäre

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \,,\;\; z \geq 0 \right\} ,$$

der vom Zylinder

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; (x - \frac{a}{2})^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{4} \right\}$$

ausgeschnitten wird.

8.6. Vertauschung von Ableitung und Integral

Die Funktion

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto F(t)$$

sei gegeben durch

$$F(t) = \int_{2t+1}^{t^2+2} \frac{e^{tx}\sqrt{1 + t^2 x}}{x(x+1)}\, dx.$$

Berechnen Sie $\dot{F}(0)$.

8.7. Online-Aufgaben

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Wir betrachten

$$K = \left\{ (x, y, z) : 0 \leq z \leq 1,\ z \geq x^2 + y^2 \right\} .$$

Sei

$$B_r = \{(x, y) : x^2 + y^2 < r^2\} , \quad r > 0.$$

Dann gilt $V(K) =$

i) $\int_0^1 \left(\int_{B_z} dxdy \right) dz = \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)\ dy \right) dx.$

ii) $\int_0^1 \left(\int_{B_{z^2}} dxdy \right) dz = \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)\ dy \right) dx.$

iii) $\int_0^1 \left(\int_{B_{\sqrt{z}}} dxdy \right) dz = \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)\ dy \right) dx.$

(b) Die Länge des Graphs der Funktion

$$[a, b] \ni x \overset{f}{\mapsto} f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

ist...

i) $b - a$.

ii) $e^b - e^a$.

iii) $\frac{e^b - e^{-b} - e^a + e^{-a}}{2}$.

(c) Die Länge der Kurve

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \ni t \overset{f}{\mapsto} f(t) = \left(\frac{1}{4} \cos(2t), \cos^3 t, \sin^3 t \right)$$

ist...

i) $\sqrt{10}$.

ii) 1.

iii) 2.

iv) π.