9.1. Vektorfeld

(a) Skizzieren Sie das Vektorfeld $K(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y \\ x \end{pmatrix}$ in einer Teilmenge des $\mathbb{R}^2$, beispielsweise auf $[-2,2] \times [-2,2]$.

(b) Zeichnen Sie einige Flusslinien, indem Sie von einem beliebigen Punkt ausgehend dem Vektorfeld folgen. Dies sind graphische Veraunschaulichung der Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}(x(t), y(t)) = K(x(t), y(t))$$

(c) Existiert ein Potential zu K, d.h. eine Funktion Φ, so dass $\nabla\Phi = K$?

(d) Warum stehen die Aufgaben b) und c) nicht in einem Widerspruch zueinander?

(e) Vergleichen Sie diese Aufgabe auch mit dem Richtungsfeld einer Differentialgleichung erster Ordnung wie in Aufgabe 9.3, Analysis I und machen Sie sich klar, worin sich die Konzepte unterscheiden.

9.2. Masse

Sei B der Tetraeder, welcher von den Koordinaten Ebenen und der Ebene $x+y+z=2$ berandet ist. Berechnen Sie $\int_B y^2 \, d\mu(x,y,z)$.

Bemerkung: Interpretiert man $\rho(x,y,z) = y^2$ als Dichte des Körpers B, so ist das berechnete Integral die Gesamtmasse von B.

9.3. Linienintegrale I

Berechnen Sie die folgenden Wegintegrale im $\mathbb{R}^2$:

(a) $\int_\gamma ((x+y)\,dx + (x-y)\,dy)$, wobei γ die Parabel $y = x^2$ vom Punkt $(-1,1)$ zum Punkt $(1,1)$ durchläuft.

(b) $\int_\gamma xy^2\,dy$, wobei γ den Halbkreis $\{(x,y) : x^2 + y^2 = 4, y \geq 0\}$ im Gegenuhrzeigersinn durchläuft.

(c) $\int_\gamma ((x^2+y^2)\,dx + (x^2-y^2)\,dy)$, wobei γ das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$ einmal im Gegenuhrzeigersinn durchläuft.

9.4. Linienintegrale II

Berechnen Sie das Linienintegral $\int_\gamma \mathbf{K} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}$ des Vektorfelds $\mathbf{K}$ längs der Kurve γ in den folgenden Fällen:

(a) $\mathbf{K}(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$ und γ die Parabel $y = x^2$ vom Punkt $(-1,1)$ zum Punkt $(1,1)$.

(b) $\mathbf{K}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ xy^2 \end{pmatrix}$, wobei γ den Halbkreis $\{(x,y) : x^2+y^2 = 4, y \geq 0\}$ im Gegenuhrzeigersinn durchläuft.

(c) $\mathbf{K}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ x^2-y^2 \end{pmatrix}$, wobei γ das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0), (1,0)$ und $(0,1)$ einmal im Gegenuhrzeigersinn durchläuft.

9.5. Linienintegrale III

Berechnen Sie das Linienintegral $\int_\gamma \mathbf{K} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}$ des Vektorfelds $\mathbf{K}$ längs der Kurve γ in den folgenden Fällen:

(a) $\mathbf{K}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3xy \\ -5z \\ 10x \end{pmatrix}$ und $\gamma : t \mapsto \begin{pmatrix} t^2+1 \\ 2t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ für $t \in [1,2]$;

(b) $\mathbf{K}(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ -2y^2 \end{pmatrix}$ und $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ für $t \in [0, 2\pi]$;

(c) $\mathbf{K}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+z \\ -2x^2+y \\ e^z \end{pmatrix}$ und $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$ für $t \in [0, 2\pi]$.

9.6. Das Potential

(a) Das Vektorfeld $\mathbf{K}(x,y) = \begin{pmatrix} y^2+5 \\ 2xy-8 \end{pmatrix}$ ist konservativ. Berechnen Sie ein Potential, wie in Satz 6.2 im Skript

(b) Für das selbe Vektorfeld, berechnen Sie ein Potential mit folgender Methode: Sei $f(x,y)$ das noch unbekannte Potential. Es muss also gelten $\nabla f = \mathbf{K}$. Schreiben Sie diese Gleichungen explizit hin und versuchen Sie sie zu lösen, indem Sie nach x respektive y integrieren.

Hinweis: Wenn man eine von x und y abhängige Funktion nach y integriert, dann ist die dabei entstehende Integrationskonstante eine von x abhängige Funktion und umgekehrt, wie in Satz 5.1.

(c) Vergleichen Sie die Lösungen von (a) und (b).

(d) Betrachten Sie nun das Vektorfeld $\mathbf{K}(x,y) = \left(x^2 - 2y^3, x + 5y\right)$ und versuchen Sie, die Methode von (b) anzuwenden. Was geschieht?

(e) Was würde geschehen, wenn man die Methode zur Bestimmung eines Potentials von Satz 6.2 auf dieses Vektorfeld anwendet?

9.7. Online-Aufgaben

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Welche der folgenden Funktionen ist ein Potential des Vektorfeldes $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 2x + \cos x \cos y \\ 1 - \sin x \sin y \end{pmatrix}$?

i) $f(x,y) = 2x + \cos x \cos y + 1 - \sin x \sin y$

ii) $f(x,y) = x^2 + y + \sin x \cos y$

iii) $f(x,y) = 2x^2 + 2y + 2 \sin x \cos y$

(b) Das Linienintegral des Vektorfeldes $\mathbf{K}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 y \\ -x^3 \end{pmatrix}$ entlang des im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen Kreises $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ist...

i) 0.

ii) π.

iii) $-\pi$.