10.1. Satz von Green I

Sei $Q = [0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$.

(a) Nutzen Sie den Satz von Green, um den Flächeninhalt von Q zu berechnen.

(b) Berechnen Sie das Linienintegral $\int_{\partial Q} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z}$, wobei $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \sin(x)\log(x^2+1) \\ x \end{pmatrix}$.

(c) Berechnen Sie das Linienintegral $\int_{\partial Q} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z}$, wobei $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} xy \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}$.

10.2. Satz von Green II

Berechnen Sie das folgende Integral zuerst als Linienintegral, dann mit Hilfe des Satzes von Green:

$$I := \int_{\partial B} [\, y\, dx + \sin(x)\, dy \,] \text{ mit } B := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -\tfrac{\pi}{2} \le x \le \tfrac{\pi}{2},\ -1 \le y \le \cos(x) \right\}$$

10.3. Linienintegral

Betrachten Sie das Vektorfeld

$$\mathbf{K} : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^2, \qquad \mathbf{K}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{S^1} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z}$$

wobei $S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$, im Gegenuhrzeigersinn orientiert.

(b) Verifizieren Sie, dass $\operatorname{rot} \mathbf{K} := \frac{\partial K_2}{\partial x} - \frac{\partial K_1}{\partial y} = 0$.

(c) Begründen Sie, warum der Satz von Green in Teil (a) nicht angewendet werden kann, um zu zeigen, dass Sie 0 erhalten.

(d) Berechen Sie

$$\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z}$$

wobei $\gamma := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + \frac{y^2}{4} = 1\}$, im Gegenuhrzeigersinn orientiert.

10.4. Das Potential

Betrachten Sie in der punktierten x-y–Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ das Vektorfeld

$$\mathbf{K}(x,y) := \begin{pmatrix} \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie das Umlaufintegral

$$I := \int_\gamma \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z}$$

um den Kreis γ mit Radius $R > 0$ und Mittelpunkt $M := (0,0)$.

(b) Zeigen Sie durch Konstruktion eines Potentials, dass $\mathbf{K}$ konservativ ist.

(c) Verifizieren Sie durch explizite Rechnung, dass $\mathbf{K}$ die Integrabilitätsbedingung

$$\operatorname{rot} \mathbf{K} := \frac{\partial K_2}{\partial x} - \frac{\partial K_1}{\partial y} = 0$$

erfüllt.

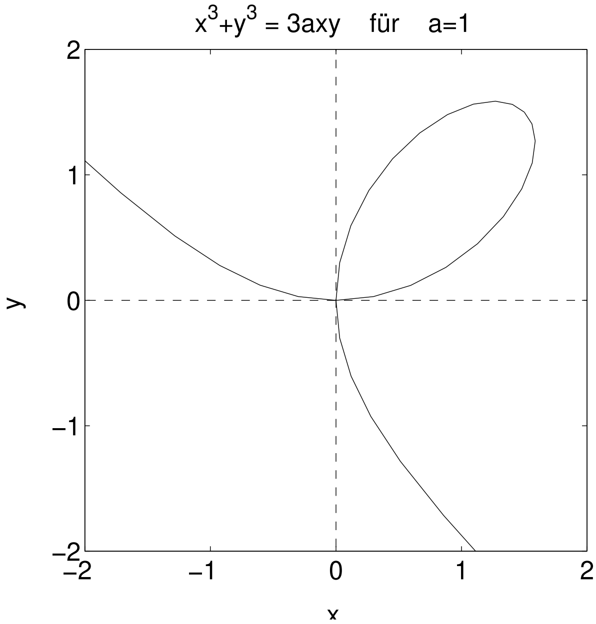
Achtung: Vergleichen Sie diese Aufgabe auch mit Aufgabe 10.3.

10.5. Satz von Green III

Es sei $a > 0$ ein Parameter. Betrachten Sie das kartesische Blatt, welches durch die Lösungsmenge der Gleichung

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

gegeben ist.



(a) Zeigen Sie mithilfe des Satzes der impliziten Funktionen, wo die Kurve lokal als Graph einer Funktion von x dargestellt werden kann.

(b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt der geschlossenen Schleife.

Hinweis: Finden Sie eine Parametrisierung $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ der Kurve durch den Ansatz $y = tx$. Bestimmen Sie den Bereich, den der Parameter t in der Schleife durchläuft. Drücken Sie den Flächeninhalt mit dem Satz von Green durch ein Linienintegral aus. Beachten Sie auch, dass die Aussage von Teil a) kein Problem ist, denn wir brauchen nur irgendeine Parametrisierung und nicht eine solche, die als Graph einer Funktion gegeben ist.

10.6. Online-Aufgaben

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Gegeben seien das Vektorfeld $\mathbf{K}(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy + 3x^2y + y^2 \\ x^2 + x^3 + xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ und die Menge $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| = 1\}$. Berechnen Sie

$$\int_S P dx + Q dy$$

i) $-\frac{2}{3}$

ii) 0

iii) $\frac{2}{3}$

(b) Welches der folgenden Vektorfelder hat ein Potential?

i) Das Vektorfeld $(x - y,\, x - y)$ hat ein Potential.

ii) Das Vektorfeld $(x^2 - y,\, x^3 + 2xy)$ hat ein Potential.

iii) Das Vektorfeld $(x^3 + 2xy,\, x^2 - y)$ hat ein Potential.

iv) Das Vektorfeld $(x^3 - xy^2,\, x^2y - y^5)$ hat ein Potential.

(c) Das Vektorfeld $\mathbf{K}(x, y) = (e^x \sin(y), e^x \cos(y))$ ist

i) nicht konservativ.

ii) konservativ.