11.1. Rotation und Divergenz I

Berechnen Sie Rotation und Divergenz der folgenden Vektorfelder $\mathbf{K_i}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

(a) $\mathbf{K_1}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

(b) $\mathbf{K_2}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2y \\ y^2x \end{pmatrix}$,

(c) $\mathbf{K_3}(x,y) = \begin{pmatrix} ay \\ bx \end{pmatrix}$ für $a, b \in \mathbb{R}$.

11.2. Satz von Gauss

Gegeben seien das Dreieck

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1 \right\}$$

und das Vektorfeld

$$\mathbf{K} := \begin{pmatrix} 2xy - y^2 \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie den Fluss von $\mathbf{K}$ durch den Rand ∂B von innen nach aussen

(a) als Flussintegral,

(b) mit Hilfe des Satzes von Gauss.

11.3. Rotation und Divergenz II

Sei $\mathbf{K}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld mit Komponenten $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix}$.

Die *Rotation* von $\mathbf{K}$ ist das Vektorfeld

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{K} := \nabla \times \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{\partial K_3}{\partial y} - \frac{\partial K_2}{\partial z} \\ \frac{\partial K_1}{\partial z} - \frac{\partial K_3}{\partial x} \\ \frac{\partial K_2}{\partial x} - \frac{\partial K_1}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Die *Divergenz* von $\mathbf{K}$ ist das Skalarfeld

$$\operatorname{div}\mathbf{K} := \nabla \cdot K = \frac{\partial K_1}{\partial x} + \frac{\partial K_2}{\partial y} + \frac{\partial K_3}{\partial z}\,.$$

Berechnen Sie Rotation und Divergenz in den folgenden Fällen

(a) $\mathbf{K}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xz \\ xy \\ yz \end{pmatrix}$,

(b) $\mathbf{L}(x,y,z) = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}$,

(c) $\mathbf{M}(x,y,z) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$.

11.4. Fluss durch Oberfläche

Betrachten Sie die folgende Parametrisierung eines Zylinders Z:

$$\begin{aligned} \Phi\colon [0,1] \times [0,2\pi] &\to \mathbb{R}^3 \\ (z,\varphi) &\mapsto (2\cos\varphi, 2\sin\varphi, z). \end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie mithilfe der Parametrisierung Φ ein Einheitsnormalenvektorfeld an Z.

(b) Überzeugen Sie sich, dass der berechnete Normalenvektor auch graphisch Sinn macht.

(c) Sei $\mathbf{K}(x,y,z) \equiv \mathbf{K_0}$ ein konstantes Vektorfeld. Berechnen Sie den Fluss von $\mathbf{K}$ durch Z von innen nach aussen.

11.5. Operationen auf Vektor- und Skalarfeldern

Seien f ein Skalarfeld und $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$ Vektorfelder im $\mathbb{R}^3$, jeweils hinreichend oft stetig differenzierbar.

Formulieren und beweisen Sie Identitäten der Form

$$\mathbf{rot}(f\mathbf{K}) = (\nabla f) \times \mathbf{K} + f \cdot \mathbf{rot}\,\mathbf{K}\,.$$

(a) $\operatorname{div}(f\mathbf{K}) = \nabla f \cdot \mathbf{K} + f \cdot \operatorname{div} \mathbf{K}$

(b) $\operatorname{div}(\mathbf{K} \times \mathbf{L}) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{rot}\,\mathbf{K} - \mathbf{K} \cdot \mathbf{rot}\,\mathbf{L}$

(c) $\mathbf{rot}(\nabla f) = \ \dots$

(d) $\operatorname{div}(\mathbf{rot}\,\mathbf{K}) = \ \dots$

(e) $\operatorname{div}(f \cdot \mathbf{rot}\,\mathbf{K}) = \ \dots$

11.6. Online-Aufgaben

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Die Divergenz des Vektorfelds

$$\mathbf{K}(x, y) = \left(x^3 + \cos y, \frac{e^y + xy}{1 + x^2}\right)$$

ist...

i) $x^3 + \cos y + \frac{e^y+xy}{1+x^2}$.

ii) $-\sin y + \frac{y-yx^2-2xe^y}{(1+x^2)}$.

iii) $x^3 + \cos y - \frac{e^y+xy}{1+x^2}$.

iv) $\frac{3x^2+3x^4+x+e^y}{1+x^2}$.

(b) Gegeben seien das Bereich

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ -1 < x < 1,\ 0 < y < -x^2 + 1 \right\}$$

und das Vektorfeld

$$\mathbf{K} := \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} + y \\ e^{x^2} \end{pmatrix} .$$

Der Fluss von $\mathbf{K}$ durch den Rand ∂B von innen nach aussen ist...

i) 0.

ii) $-2/3$.

iii) -1.

iv) $2/5$.

v) $-2/5$.