12.1. Satz von Gauss

Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\mathbf{K}(x,y,z) := (yz, zx, xy)$ von innen nach aussen durch den im ersten Oktanten gelegenen Teil der Fläche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

direkt und mit Gauss.

12.2. Integralsätze im $\mathbb{R}^3$ I

Sei $M := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 = x_3\}$, $G := \{(x_1, x_2, x_3) \in M \,|\, |x_3| \leq 1\}$ und $\mathbf{K} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld

$$\mathbf{K}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Skizzieren Sie M und G.

(b) Berechnen Sie

$$\int_G \mathbf{K} \cdot d\omega$$

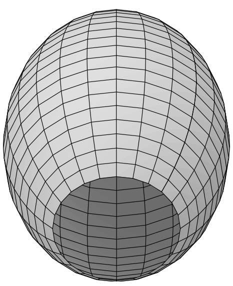
direkt mit der Definition.

(c) Berechnen Sie das Integral mit Hilfe des Satzes von Gauss.

(d) Berechnen Sie das Integral mit Hilfe des Satzes von Stokes.

12.3. Integralsätze im $\mathbb{R}^3$ II

Ein Heissluftballon habe die Form einer Sphärenkappe vom Radius $R > 0$ und Öffnungsdurchmesser $0 < d < 2R$ gemäss Figur.



Das heisse Gas dringt durch die poröse Oberfläche B mit der Geschwindigkeit

$$v = \operatorname{rot} F, \quad \text{wobei} \quad F(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Man berechne den Fluss $\int_B v \cdot d\vec{\omega}$ durch die Ballonoberfläche B:

(a) mit direkten Rechnungen;

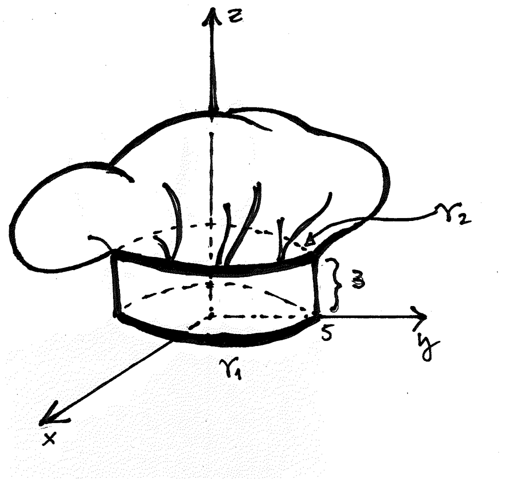
(b) mit Hilfe des Satzes von Gauss;

(c) mit Hilfe des Satzes von Stokes.

12.4. Kochhut

(a) Sei $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} xze^{xyz} \\ -yze^{xyz} \\ 2x \end{pmatrix}$. Gibt es ein anderes Vektorfeld $\mathbf{F}$, so dass $\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{K}$?

(b) Betrachten Sie den folgenden Kochhut, betrachtet als glatte Oberfläche S im Raum.



Die Kurven γ_1 und γ_2 sind hierbei Kreise mit Mittelpunkten $(0,0,0)$ respektive $(0,0,3)$ und Radius 5.

Berechnen Sie

$$\int_S \mathbf{K} \cdot d\omega,$$

mit $\mathbf{K}$ wie in Teil a).

12.5. Online-Aufgaben

(a) Gegeben seien der Vektor $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und die Funktion $f(x, y, z) = \frac{1}{6}(x^2 + y^2 + z^2)$. Betrachten Sie das Vektorfeld

$$v = \nabla f + a \times \nabla f \,.$$

Die Divergenz von v ist...

i) $a_1 x + a_2 y + a_3 z$.

ii) 0.

iii) $a_1 + a_2 + a_3$.

iv) 1.

(b) Seien a, f und v wie oben. Der Fluss von v durch die Oberfläche der Einheitskugel um den Ursprung ist...

i) a_3.

ii) $\frac{4}{3}\pi$.

iii) 0.

iv) $a_1 + a_2 + a_3$.

v) π^2.

(c) Seien a, f und v wie oben. $\operatorname{rot} v$ ist...

i) a.

ii) $\frac{2}{3}a$.

iii) 0.

iv) ∇f.

v) $-\nabla f + v$.