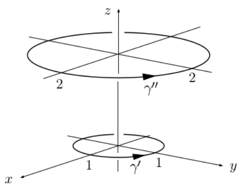
13.1. Linienintegral

Ausserhalb der z-Achse sei das Vektorfeld $\mathbf{K}$ gegeben durch

$$\mathbf{K}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{2(zx+y)}{x^2+y^2} \\ \frac{2(zy-x)}{x^2+y^2} \\ \log(x^2+y^2) \end{pmatrix}.$$

Betrachten Sie die zwei Kreise γ' und γ'' mit Mittelpunkten $(0,0,0)$ und $(0,0,2)$ wie in folgender Graphik:



(a) Berechnen Sie $\int_{\gamma'} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z}$.

(b) Berechnen Sie $\int_{\gamma'} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z} - \int_{\gamma''} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z}$.

13.2. Potential

Bestimmen Sie, ob die folgenden Vektorfelder ein Potential besitzen und berechnen Sie es gegebenenfalls.

(a) $\mathbf{K}(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \sin(y) \\ e^x \cos y \end{pmatrix}$,

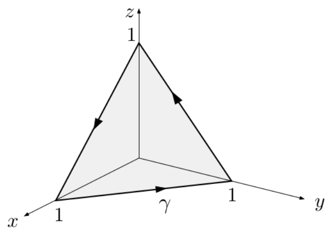
(b) $\mathbf{K}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^3+y+xz \\ x+yz+z^3 \\ x^2+z^3 \end{pmatrix}$,

(c) $\mathbf{K}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4x^3+2xyz \\ x^2z+2yz^2 \\ x^2y+2y^2z \end{pmatrix}$,

(d) $\mathbf{K}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+2y+\alpha z \\ \beta x-3y-z \\ 4x+\gamma y+2z \end{pmatrix}$. (Finden Sie alle α, β, γ, so dass ein Potential existiert.)

13.3. Stokes

Sei $\mathbf{K}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x-y+z \\ y-z+x \\ z-x+y \end{pmatrix}$ und γ wie in folgender Figur die Kurve von $(1,0,0)$ über $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$ zurück nach $(1,0,0)$:



Berechnen Sie $\int_\gamma \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z}$

(a) direkt.

(b) mit Hilfe des Satzes von Stokes.

13.4. Rotationskörper

Gegeben sei der Rotationskörper $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < y < 1,\, x^2+z^2 \le y^2\}$.

(a) Berechnen Sie das Volumen von V.

(b) Berechnen Sie $\int_V f \, d\mu(x,y,z)$, wobei $f(x,y,z) = \frac{2}{y}$

(c) Berechnen Sie (direkt) $\int_{\partial V} \mathbf{K} \cdot d\omega$, wobei $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y}(x-z) \\ 1 \\ \frac{1}{y}(x+z) \end{pmatrix}$. Hinweis: Der Punkt $(0,0,0) \in \partial V$, an welchem $\mathbf{K}$ eigentlich nicht definiert ist, kann ignoriert werden.

(d) Vergleichen Sie b) und c).

13.5. Wirbelfrei vs. exakte Differentialgleichung

Gegeben seien die Funktionen $P(x,y) = y^2 e^x$ und $Q(x,y) = 2y(e^x+1)$, definiert auf ganz $\mathbb{R}^2$.

(a) Finden Sie ein Potential zum Vektorfeld $\mathbf{K}(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$.

(b) Finden Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{cases} y^2 e^x + 2y(e^x+1)y' = 0 \\ y(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

13.6. Online-Aufgaben

(a) Sei $\mathbf{K}$ ein Vektorfeld definiert auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $\mathbf{rot}(\mathbf{K}) = 0$. Welche der folgenden Aussagen ist/sind immer korrekt?

i) $\mathbf{K}$ besitzt ein Potential.

ii) Falls U einfach zusammenhängend ist, so besitzt $\mathbf{K}$ ein Potential.

iii) Falls U ein Ball ist, d.h. von der Form $\{(x,y,z) \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 < r^2\}$, so besitzt $\mathbf{K}$ ein Potential.

(b) Welche der folgenden Aussagen sind (in $\mathbb{R}^3$) sinnvoll?

i) Man kann den Fluss eines Vektorfeldes über eine Kurve integrieren.

ii) Man kann den Fluss eines Vektorfeldes durch eine Fläche integrieren.

iii) Man kann den Fluss eines Vektorfeldes durch ein Volumen integrieren.

iv) Man kann eine Funktion über eine Kurve im Raum integrieren.

v) Man kann eine Funktion über eine Fläche im Raum integrieren.

(c) Sei $\mathbf{K}$ ein Vektorfeld in $\mathbb{R}^3$. Es bezeichne V ein Volumen und S eine Oberfläche in $\mathbb{R}^3$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekte Integrationssätze?

i) $\int_S \mathbf{K} \cdot d\omega = \int_{\partial S} \mathrm{div}(\mathbf{K})\, d\mathbf{z}$.

ii) $\int_V \mathrm{div}(\mathbf{K})\, d\mu = \int_{\partial V} \mathbf{K} \cdot d\omega$.

iii) $\int_S \mathbf{rot}(\mathbf{K}) \cdot d\omega = \int_{\partial S} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z}$.

iv) $\int_S \mathbf{K} \cdot d\omega = \int_{\partial S} \mathbf{rot}(\mathbf{K}) \cdot d\mathbf{z}$.

iv) $\int_V \mathbf{K} \cdot d\mu = \int_{\partial V} \mathbf{rot}(\mathbf{K}) \cdot d\omega$.