D-MAVT, D-MATL
Dr. Andreas Steiger

Analysis II

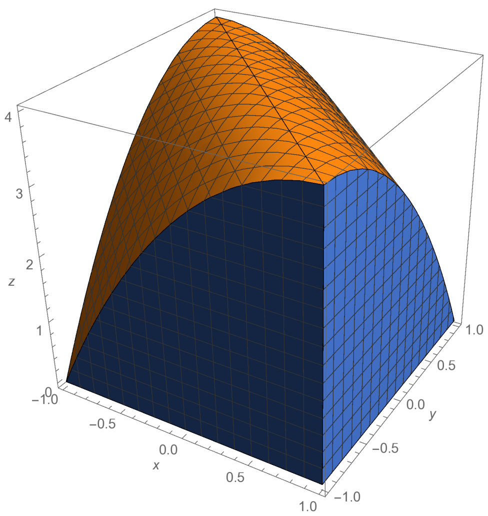
FS 2020

Schnellübung 11

1. Es bezeichne S die Region

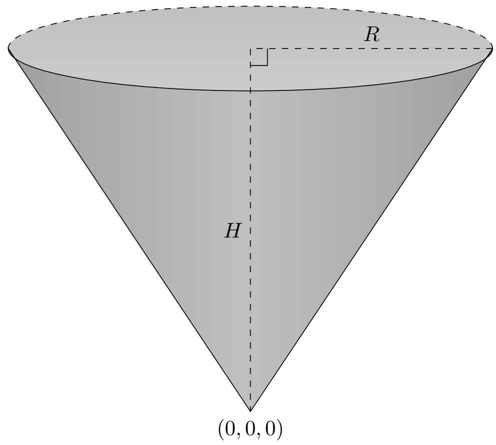
$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 4 - (x+y)^2\right\}.$$

Verwenden Sie den Divergenzsatz um den Fluss des Vektorfeldes $\vec{v} = (2xy, -y^2, z^2)$ durch S (von innen nach aussen) zu berechnen.



Bitte wenden!

2. Gegeben sei eine Strömung mit Geschwindigkeitsvektor $\vec{v} = (2x^2, y, 1 - z)$. Welche Menge strömt (von aussen nach innen) pro Zeiteinheit durch die Mantelfläche des geraden Kreiskegels mit Radius R und Höhe H parallel zur z-Achse mit Spitze im Ursprung?



3. Für ein Skalarfeld f sei der Laplaceoperator Δ gegeben durch

$$\Delta f := \operatorname{div} \ \mathbf{grad}\, f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}.$$

Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ ein endlicher Bereich mit Rand ∂B und seien f, g zweimal stetig differenzierbare Skalarfelder. Beweisen Sie die Greenschen Identitäten, die in der Potentialtheorie und in der Elektrodynamik gebraucht werden.

a) Erste Greensche Identität

$$\iint_{\partial B} (f \cdot \mathbf{grad}\, g) \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}O = \iiint_B (f \cdot \Delta g + \mathbf{grad}\, f \cdot \mathbf{grad}\, g)\ \mathrm{d}V$$

Hinweis: Wenden Sie den Divergenzsatz für das Vektorfeld $f \cdot \mathbf{grad}\, g$ an.

b) Zweite Greensche Identität

$$\iint_{\partial B} (f \cdot \mathbf{grad}\, g - g \cdot \mathbf{grad}\, f) \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}O = \iiint_B (f \cdot \Delta g - g \cdot \Delta f)\ \mathrm{d}V$$