Schnellübung 12

1. (★★) Betrachten Sie das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \longmapsto \big(2xy + 3, x^2 - 4z, -4y\big)\,.$$

a) Zeigen Sie, dass $\vec{v}$ konservativ ist.

b) Finden Sie eine Funktion f, so dass $\vec{v} = \mathbf{grad} f$.

c) Berechnen Sie

$$\int_C \vec{v} \cdot d\vec{r},$$

wobei C ein beliebiger Weg ist, der die Punkte $(3, -1, 2)$ und $(2, 1, -1)$ verbindet.

2. (★★) Es sei $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ein Vektorfeld.

a) Beweisen Sie die Identität $\mathbf{div}\,\mathbf{rot}\,\vec{v} = 0$.

b) Zeigen Sie weiters: Ist $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so ist

$$\mathbf{div}\,\mathbf{grad}\, f = \Delta f,$$

wobei (wie bekannt) $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$ ist.

c) Beweisen Sie die Identität $\mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\, f = \vec{0}$.

d) Beweisen Sie die Identität

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\vec{v} = \mathbf{grad}\,\mathbf{div}\,\vec{v} - \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

3. (★★½) Berechnen Sie die Arbeit, welche das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \longmapsto (yz, xyz, xy)$$

entlang des geschlossenen Weges Γ (siehe Figur) leistet. Die einzelnen Teilabschnitte des Weges Γ haben dabei Länge 1.