

Schnellübung 14

1. (★★★★) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' + (\lambda - 4)y' + \frac{1}{2}\lambda y = 0.$$

Für welche Werte des reellen Parameters λ gibt es eine von Null verschiedene Lösung $y(x)$, die für $x \rightarrow \infty$ beschränkt bleibt?

2. (★★★★) Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$r^2 u''(r) = -ru'(r) + u(r) + 2r, \quad \text{wobei } r > 0.$$

- a) Finden Sie die Lösung $u(r)$ mit $u(1) = 0$ und $u'(1) = 0$.
b) Finden Sie all diejenigen Lösungen $u(r)$, welche für $r \rightarrow 0$ konvergieren.

3. (★★★) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x^2 y'' + 4xy' + 2y = 3x$$

und zeigen Sie, dass sie nur eine auf der ganzen reellen Achse definierte Lösung hat.

4. (★★★★) Eine Lösungskurve $y = u(x)$ der Differentialgleichung $y'' - 3y' - 4y = 0$ schneidet eine Lösungskurve $y = w(x)$ der Gleichung $y'' + 4y' - 5y = 0$ im Ursprung. An dieser Stelle haben beide Kurven die selbe Steigung. Bestimmen Sie die Funktionen u und w , wenn ausserdem die Bedingung

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{w(x)^4}{u(x)} = \frac{5}{6}$$

erfüllt wird.