Schnellübung 9

1. Die Gleichung $z = 2y^2 + x^2$ beschreibt eine Fläche S im dreidimensionalen Raum, welche den Punkt $P = (1, 1, 3)$ enthält. Man finde die Koordinaten des anderen Punktes von S, der auf der Normalen zu S in P liegt.

2. Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $(x, y) \mapsto 3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x - 4y + 4$ gegeben. Finden Sie die globalen Extrema auf der Kreisscheibe

$$B = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

3. Aus einer Funktion einer Variablen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $\rho \mapsto f(\rho)$, entsteht durch Einsetzen von $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ die Funktion dreier Variablen

$$\widetilde{f}\colon (x, y, z) \mapsto f\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right).$$

a) Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{grad} \widetilde{f} = \frac{f'(\rho)}{\rho} \cdot \vec{\rho}$$

gilt, wobei $\vec{\rho} = (x, y, z)$ ist.

b) Bestimmen Sie f derart, dass $f(1) = 0$ und

$$\operatorname{grad} \widetilde{f} = \frac{\vec{\rho}}{\rho^5}$$

gilt.

4. Gegeben sei eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Jedes Doppelintegral unten ergibt sich aus der Berechnung des Gebietsintegrales von f über ein gegebenes Gebiet S.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x.$

b) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \int_{-\sin(x/2)}^{\sin x} f(x, y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x.$

Skizzieren Sie jeweils das Gebiet S und vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge.