Dr. Andreas Steiger

Serie 14

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online auf `https://echo.ethz.ch` gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis *Mittwoch, 04.03.2020 um 08:00 Uhr* ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!
Die Sterne an den Aufgaben geben die Schwierigkeit an: Einfache Aufgaben, die direkte Anwendungen der Definitionen und Sätze sind werden mit (★) markiert. Zwei Sterne (★★) stehen für fortgeschrittene Anwendungen und Aufgaben mit drei Sternen (★★★) sind auf dem Niveau der Basisprüfung.

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: *Mittwoch, 04.03.2020* in der Vorlesung oder am selben Tag bis 12:15 ins Fach des Übungsassistenten im HG J 68.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2020/fs/401-0262-G0L`

Geogebra-Applets zu Kapitel IV: `https://www.geogebra.org/m/uzebkcz2#chapter/456603`

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. (★) Für welche der folgenden Funktionen f ist

$$f_x(x,y) = e^{4x} + 2xy^2,$$

$$f_y(x,y) = \cos y + 2x^2 y?$$

(a) $(x,y) \longmapsto \frac{1}{4}e^{4x} + x^2y^2 + \sin y + \pi$.

(b) $(x,y) \longmapsto \frac{1}{4}e^{4x} + x^2y^2 + v(y)$, wobei $v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion ist.

(c) $(x,y) \longmapsto \frac{1}{4}e^{4x} + x^2y^2 + \sin(\pi - y)$.

(d) Keine Option ist richtig.

Bitte wenden!

2. (★½) Die zweifach stetig differenzierbaren Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, für welche die partiellen Ableitungen $f_{xx} \equiv f_{yy} \equiv 0$ identisch verschwinden, sind genau

(a) die Produkte einer Funktion von x mit einer Funktion von y.

(b) die Produkte von zwei linearen Funktionen.

(c) die Produkte einer linearen Funktion von x mit einer linearen Funktion von y.

(d) die Funktionen der Gestalt $a + bx + cy + dxy$ für Konstanten a, b, c, d.

3. (★) Die Gleichung der Tangentialebene an das Paraboloid $z = x^2 - y^2$ im Punkt $(2, 1, 3)$ lautet

(a) $4x - 2y - z = 3$.

(b) $2x + 4y - z = 1$.

(c) $2x + 4y - z = 5$.

(d) $4x + 2y - z = 3$.

4. (★½) Für welche der folgenden Paaren von Funktionen $\phi, \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ existiert eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sodass $f_x(x, y) = \phi(x, y)$ und $f_y(x, y) = \psi(x, y)$ gilt?

Hinweis: Überprüfen Sie die Integrabilitätsbedingung!

(a) $\phi(x, y) = \left(\frac{y^3}{3}\right) \sinh(x) + y + \frac{x^2}{2}$ und $\psi(x, y) = y^2 \cosh(x) + x$.

(b) $\phi(x, y) = x \sin(xy)$ und $\psi(x, y) = x \sin(xy) + 3x$.

(c) $\phi(x, y) = e^{x+\sin(y)}$ und $\psi(x, y) = \cos(y)e^{x+\sin(y)}$.

(d) $\phi(x, y) = xye^{x^2 y}$ und $\psi(x, y) = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2 y}$.

(e) $\phi(x, y) = \sinh(x^2 y)$ und $\psi(x, y) = \sinh(xy^2)$.

Siehe nächstes Blatt!

5. (★★) Gegeben ist die Funktion

$$f : (x, y) \longmapsto \frac{y}{x^2 + y^2} \ .$$

a) Bestimmen Sie den (aufgrund der gegebenen Formel grösstmöglichen) Definitionsbereich sowie den Wertebereich von f.

b) Diskutieren Sie die Niveaulinien von f und zeichnen Sie für die Funktionswerte -1, $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$ und 1 auf.

c) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z = f(x, y)$ im Punkt $(2, 1, \frac{1}{5})$.

6. (★★★) Sei f eine *beliebige* differenzierbare Funktion einer Variablen. Zeigen Sie, dass alle Tangentialebenen der Fläche

$$z = y \cdot f\left(\frac{x}{y}\right)$$

den Punkt $(0, 0, 0)$ enthalten.

7. (★★) Der für beliebige Dreiecke ABC gültige Kosinussatz lautet $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Schätzen Sie den relativen Fehler von c ab, wenn die Grössen a und b auf 1% und γ auf $0.5°$ genau gemessen werden.

8. (★★½) Für jeden der nachstehend aufgeführten Differentialausdrücke ist die folgende Frage zu beantworten: Gibt es eine Funktion $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$, deren Differential $df = f_x(x, y)\,dx + f_y(x, y)\,dy$ der gegebene Ausdruck ist? Falls ja, ist eine solche Funktion f anzugeben.

a) $\dfrac{1}{y}\,dx - \dfrac{x}{y^2}\,dy$

b) $\dfrac{2 + 2y}{x^2 + y^2}\,dx - \dfrac{2x - y}{x^2 + y^2}\,dy$

c) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dx + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dy$

d) $\dfrac{\sin xy}{\sqrt{x}}\,dx + \dfrac{\sin xy}{\sqrt{y}}\,dy$