Serie 15

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online auf `https://echo.ethz.ch` gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis *Mittwoch, 11.03.2020 um 08:00 Uhr* ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!
Die Sterne an den Aufgaben geben die Schwierigkeit an: Einfache Aufgaben, die direkte Anwendungen der Definitionen und Sätze sind werden mit (★) markiert. Zwei Sterne (★★) stehen für fortgeschrittene Anwendungen und Aufgaben mit drei Sternen (★★★) sind auf dem Niveau der Basisprüfung.

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: *Mittwoch, 11.03.2020* in der Vorlesung oder am selben Tag bis 12:15 ins Fach des Übungsassistenten im HG J 68.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2020/fs/401-0262-G0L`

Geogebra-Applets zu Kapitel IV: `https://www.geogebra.org/m/uzebkcz2#chapter/456603`

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. (★★) Es sei $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion in zwei Variablen und es seien $x_0, y_0 \in (0,1)$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Falls $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ gilt, so hat f ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum an der Stelle (x_0, y_0).

(b) Falls (x_0, y_0) eine lokale Minimalstelle von f ist, so gilt $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.

(c) Wir definieren $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $u : x \mapsto f(x, y_0)$ und $v : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $v : y \mapsto f(x_0, y)$. Falls x_0 eine globale Maximalstelle von u und y_0 eine globale Maximalstelle von v ist, dann ist (x_0, y_0) eine lokale Maximalstelle von f.

(d) Angenommen, es existieren Funktionen $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ und $v : [0,1] \to \mathbb{R}$, sodass $f(x,y) = u(x) + v(y)$ für alle $x, y \in [0,1]$ gilt. Falls x_0 eine globale Minimalstelle von u und y_0 eine globale Minimalstelle von v ist, so ist (x_0, y_0) eine globale Minimalstelle von f.

Bitte wenden!

2. (★) Der Wert einer Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ fällt am schnellsten in die Richtung

(a) der minimalen partiellen Ableitung.

(b) entgegengesetzt zur maximalen partiellen Ableitung.

(c) des Gradienten.

(d) entgegengesetzt zum Gradienten.

(e) orthogonal zum Gradienten.

3. (★⯨) Gegeben ist die Funktion $f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Die nichtleeren Niveauflächen von f sind Oberflächen von Kugeln mit Mittelpunkt O oder die Menge $\{(0, 0, 0)\}$.

(b) Die nichtleeren Niveauflächen von f sind Ebenen senkrecht zum Vektor $(1, 3, 1)$.

(c) Die nichtleeren Niveauflächen von f sind Oberflächen von Ellipsoiden mit Mittelpunkt O oder die Menge $\{(0, 0, 0)\}$.

4. (★) Bestimmen Sie die Richtungsableitung der Funktion $f(x, y, z) = x^2 + y + z^3$ an der Stelle $(1, 2, 2)$ in Richtung des Einheitsvektors $\frac{1}{3}(2, 2, 1)$.

(a) $\dfrac{34}{3}$

(b) 6

(c) $(2, 1, 12)$

(d) $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 4)$

5. (★⯨) Die Richtungsableitung der Funktion $f : (x, y) \mapsto \arctan(x/y)$ an der Stelle $(-3, 3)$ in die Richtung des Einheitsvektors $(3/5, 4/5)$ lautet:

(a) $\frac{7}{30}$.

(b) $\frac{7}{6}$.

(c) -$\frac{21}{5}$.

(d) -$\frac{21}{25}$.

Siehe nächstes Blatt!

6. (★★) Bestimmen Sie jene Tangentialebenen an das Ellipsoid

$$2x^2 + 2y^2 + \frac{1}{4}z^2 = 1,$$

welche parallel zur Ebene $x + y + z = 1$ sind.

(a) $x + y + z = 0$.

(b) $x + y + z = k$, für $k \in \{\pm\frac{2}{\sqrt{5}}\}$.

(c) $x + y + z = k$, für $k \in \{\pm\sqrt{5}\}$.

(d) $x + y + z = k$, für $k \in \{\pm 1\}$.

Bitte wenden!

7. (★★) Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) := xy\,(2x-5y)$$

im abgeschlossenen Quadrat mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,2)$,$(2,0)$. Berechnen Sie die globalen Extremastellen von f in diesem Quadrat.

8. (★★★) Finden Sie die Extremalstellen der Funktion

$$f(x,y) = \exp(3y^2 - 1 - x^2)$$

im Bereich

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + 2y^2 \leq 4\right\} .$$

9. (★★) Sei

a) $z(x,y) = x^2 + 3xy + 5y^2$ und $x(t) = \sin(t)$, $y(t) = \cos(t)$.

b) $z(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ und $x(t) = e^{-t}$, $y(t) = e^t$.

Berechnen Sie die Ableitung $\frac{dz}{dt}$ durch die verallgemeinerte Kettenregel. Prüfen Sie Ihr Resultat durch explizites Berechnen und Ableiten von $z(x(t), y(t))$ nach t.

10. (★★⯨) Eine Funktion von drei Variablen $f : (x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$ besitzt im Ursprung in den drei Richtungen

$$\mathbf{a} = (1,0,0), \quad \mathbf{b} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right), \quad \mathbf{c} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

die Richtungsableitungen

$$D_{\mathbf{a}} f(\mathbf{0}) = 3\,, \quad D_{\mathbf{b}} f(\mathbf{0}) = -2\,, \quad D_{\mathbf{c}} f(\mathbf{0}) = 5\,.$$

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Niveaufläche von f im Ursprung.

11. (★★⯨) Für welche Tripel von Funktionen $\phi, \psi, \chi : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y, z \neq 0\} \to \mathbb{R}$ existiert eine Funktion f, sodass $f_x = \phi$, $f_y = \psi$ und $f_z = \chi$?

Falls f existiert, geben Sie f explizit an.

a) $\phi(x,y,z) = \frac{2x}{y}$, $\quad \psi(x,y,z) = 3y^2z^2 - \frac{x^2}{y^2}$, $\quad \chi(x,y,z) = 2y^3 z$.

b) $\phi(x,y,z) = e^y + 2xy^3z^2$, $\quad \psi(x,y,z) = xe^y + 3x^2y^2z^2$, $\quad \chi(x,y,z) = 2x^2y^3 + x$.

c) $\phi(x,y,z) = e^z y\cos(xy)\,$, $\quad \psi(x,y,z) = e^z x\cos(xy)\,$, $\quad \chi(x,y,z) = e^z \sin(xy)$.

d) $\phi(x,y,z) = ze^x$, $\quad \psi(x,y,z) = \frac{1}{z}\sin\left(\frac{y}{z}\right)$, $\quad \chi(x,y,z) = \frac{y}{z^2}\sin\left(\frac{y}{z}\right) + e^x$.