D-MAVT/D-MATL | Analysis II | FS 2020
Dr. Andreas Steiger

Serie 16

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online auf `https://echo.ethz.ch` gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis *Mittwoch, 18.03.2020 um 08:00 Uhr* ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!
Die Sterne an den Aufgaben geben die Schwierigkeit an: Einfache Aufgaben, die direkte Anwendungen der Definitionen und Sätze sind werden mit (★) markiert. Zwei Sterne (★★) stehen für fortgeschrittene Anwendungen und Aufgaben mit drei Sternen (★★★) sind auf dem Niveau der Basisprüfung.

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: *Mittwoch, 18.03.2020* in der Vorlesung oder am selben Tag bis 12:15 ins Fach des Übungsassistenten im HG J 68.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2020/fs/401-0262-G0L`

Geogebra-Applets zu Kapitel IV: `https://www.geogebra.org/m/uzebkcz2#chapter/456603`

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. (★½) Die Koordinatentransformation

$$x(u,v) = 2v,$$
$$y(u,v) = -2u$$

bildet Kreise auf Kreise ab.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

Bitte wenden!

2. (★★) Betrachten Sie das Integral

$$I = \int_0^1 \int_0^x x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x.$$

Welche der folgenden Integrale sind gleich I?

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^y y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^y x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$

3. (★★½) Für welches B ist

$$\int\int_B (2 - x^2 - 2y^2)\, dF$$

am grössten?

(a) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{2} + y^2 \leq 1\}$

(b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 - x^2 - 2y^2 \geq 0\}$

(c) B ist eine gefüllte Ellipse um $(0, 0)$ mit Hauptachsen $\sqrt{2}$ und 1.

4. (★★½) Berechnen Sie das polare Flächenträgheitsmoment

$$J_0(D) = \iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy$$

eines gleichseitigen homogenen Dreiecks mit Kantenlänge $a > 0$ bezüglich seines Schwerpunktes $S = (0, 0)$.

(a) 0

(b) $4\sqrt{3}a^3$

(c) $\dfrac{\sqrt{3}}{3 \cdot 16} a^4$

(d) a^4

Siehe nächstes Blatt!

5. (★★) Betrachten Sie die Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} x(u,v) &= 2u + v, \\ y(u,v) &= u - 3v. \end{aligned}$$

a) Es bezeichne $\mathcal{R}$ das Einheitsquadrat in der xy-Ebene, also $\mathcal{R} = [0,1] \times [0,1]$. Skizzieren Sie den Bereich $\widetilde{\mathcal{R}}$ der uv-Ebene, der unter dieser Transformation entsteht.

b) Berechnen Sie die Einträge und die Determinante der Matrix

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

c) Vergleichen Sie das Resultat aus (b) mit dem Verhältnis der Flächen von $\mathcal{R}$ und $\widetilde{\mathcal{R}}$.

6. (★★★) Für eine zweimal differenzierbare Funktion $f : (x,y) \longmapsto f(x,y)$ in zwei Variablen ist der Laplace-Operator definiert als

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy}.$$

Nach einer Koordinatentransformation nimmt der Laplace-Operator in polaren Koordinaten die Form

$$f \equiv \widetilde{f}_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\widetilde{f}_{\rho} + \frac{1}{\rho^2}\widetilde{f}_{\varphi\varphi}, \tag{1}$$

wobei $\widetilde{f}(\rho,\varphi) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$ die Funktion f in polaren Koordinaten ist.

Sei nun $f : (x,y,z) \longmapsto f(x,y,z)$ eine zweimal differenzierbare Funktion in drei Variablen. Der Laplace-Operator von f ist

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}.$$

a) Berechnen Sie Δf für $f(x,y,z) = x^2 y + 2xz^{-1} + \sin(xz)$.

b) Wie kann man die Formel aus (1) erweitern, um Δf in zylindrischen Koordinaten zu darstellen?

Bemerkung: Die zylindrische Koordinaten sind durch die Transformation

$$x(\rho,\varphi,z) = \rho\cos(\varphi), \quad y(\rho,\varphi,z) = \rho\sin(\varphi), \quad z(\rho,\varphi,z) = z,$$

gegeben, wobei $\rho > 0$, $\varphi \in [0,\pi/2]$ und $z \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

c) Berechnen Sie, unter Zuhilfenahme von Teil (b), Δf für

$$f(x,y,z) = \frac{1}{z}\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - 2z\sqrt{x^2+y^2}$$

und $x, y, z > 0$.

7. (★★)

a) Berechnen Sie

$$\iint_D x^2 y^2 \, \mathrm{d}F,$$

wobei D das durch die Kurven $y = x^2$ und $y = 1$ eingeschlossene Gebiet bezeichnet.

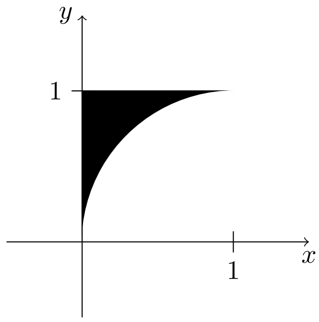
Bitte wenden!

b) Berechnen Sie

$$\iint_D x e^{x+y} \,\mathrm{d}F,$$

wobei $D = [0,1] \times [0,1]$ das Einheitsquadrat bezeichnet.

8. (★★⯨) Sei $S = \{(x,y) \in [0,1]^2 : (x-1)^2 + y^2 \geq 1\}$.



Berechnen Sie den Schwerpunkt von S.