Dr. Andreas Steiger

Serie 17

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online auf `https://echo.ethz.ch` gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis *Mittwoch, 25.03.2020 um 08:00 Uhr* ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!
Die Sterne an den Aufgaben geben die Schwierigkeit an: Einfache Aufgaben, die direkte Anwendungen der Definitionen und Sätze sind werden mit (★) markiert. Zwei Sterne (★★) stehen für fortgeschrittene Anwendungen und Aufgaben mit drei Sternen (★★★) sind auf dem Niveau der Basisprüfung.

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: *Mittwoch, 25.03.2020* in der Vorlesung oder am selben Tag bis 12:15 ins Fach des Übungsassistenten im HG J 68.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2020/fs/401-0262-G0L`

Geogebra-Applets zu Kapitel V: `https://www.geogebra.org/m/uzebkcz2#chapter/460408`

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. (★½) Es sei B ein Bereich in der (x, y)-Ebene und $\widetilde{B}$ der via Polarkoordinaten entsprechende Bereich in der (ρ, φ)-Ebene. Welchem Integral entspricht $\int_B xy \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$?

(a) $\displaystyle\int_{\widetilde{B}} \rho^2 \sin\varphi \cos\varphi \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\varphi$

(b) $\displaystyle\int_{\widetilde{B}} \rho^3 \sin\varphi \cos\varphi \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\varphi$

(c) $\displaystyle\int_{\widetilde{B}} \rho^3 \sin\varphi \cos^2\varphi \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\varphi$

Bitte wenden!

2. (★★) Es sei

$$I = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}F,$$

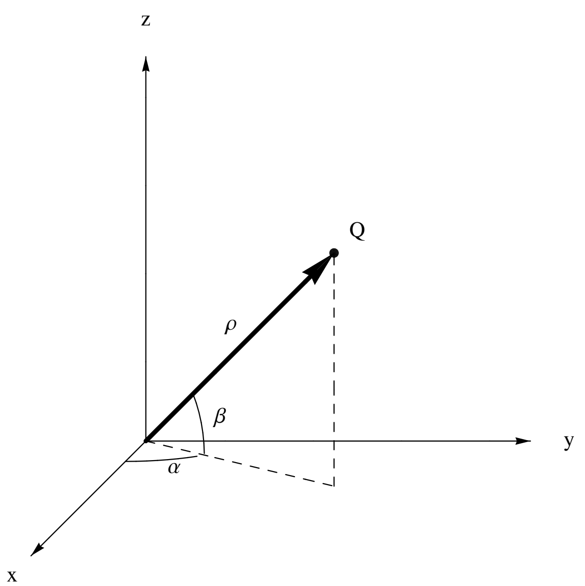
wobei D das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(1,1)$ bezeichne. Je nach Wahl des Koordinatensystems und der Reihenfolge der Integration lässt sich I auf verschiedene Arten als zweifaches Integral ausdrücken. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) $I = \int_0^1 \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

(b) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} \rho^2\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi$

(c) $I = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

3. (★★) Das Volumenelement der Koordinaten, welche in der untenstehenden Abbildung definiert sind, ist gegeben durch



(a) $\rho^2 \cos\beta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta$.

(b) $\rho\cos\alpha\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta$.

(c) $\rho^2 \sin\beta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta$.

(d) $\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta$.

(e) $\rho\sin\beta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta$.

4. (★★) Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die durch die Vorschrift

$$(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}.$$

definiert ist. Es sei $J(x, y)$ die Jacobimatrix der Funktion f an der Stelle (x, y). Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) $\det J(x, y) = 1$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) $\det J(x, y) \neq 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) $\det J(x, y) = 0$ genau dann, wenn $(x, y) = (0, 0)$.

(d) $\det J(x, y) = 16$ auf der Menge $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

5. (★⯨) Gegeben ist ein Zylinder Z (Dichte 1) mit Radius R und Höhe h der senkrecht auf der xy-Ebene steht. Welches der folgenden Integrale in Zylinderkoordinaten beschreibt das Trägheitsmoment Θ des Zylinders Z bezüglich der z-Achse?

(a) $\int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^h r \, dz \, dr \, d\varphi$

(b) $\int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^h r^2 \, dz \, dr \, d\varphi$

(c) $\int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^h r^3 \, dz \, dr \, d\varphi$

(d) $\int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^h r^4 \, dz \, dr \, d\varphi$

Bitte wenden!

6. (★★) Berechnen Sie den Betrag der Determinante der Jacobi-Matrix für folgende Koordinatentransformationen.

a) Von kartesischen Koordinaten in Zylinderkoordinaten.

b) Von kartesischen Koordinaten in Kugelkoordinaten.

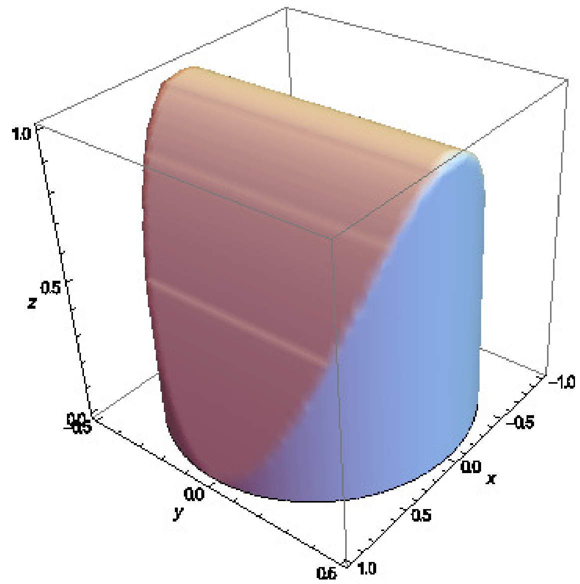
c) Von Kugelkoordinaten in kartesische Koordinaten.

Was fällt Ihnen auf?

7. (★★) Sei T ein Tetraeder mit Eckpunkten $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,3)$ und $f(x,y,z) = x+y$. Berechnen Sie das Integral

$$\int\int\int_T f(x,y,z)\;dV.$$

8. (★★½) Berechnen Sie das oberhalb der Ellipse $x^2+4y^2 \leq 1$ und unterhalb der Fläche $z = 1-x^2$ liegende Volumen.



Hinweis: Finden Sie Koordinaten in der xy-Ebene in denen die Ellipse eine besonders einfache Form hat.

9. (★★★) Ein gerader Kreiszylinder mit Radius R, $(x^2+y^2 \leq R^2)$, und Höhe H, $(0 \leq z \leq H)$, habe eine Dichte von $\rho(x,y,z) = 1+x^2+y^2+z$. Berechnen Sie die Masse und das Trägheitsmoment bei Rotation um die z-Achse.

10. (★★½) In der xy-Ebene werde der Bereich B durch die Strecke von $(0,0)$ nach $(1,0)$ und dem Kurvenbogen mit der Polardarstellung $\rho = \sin\left(\frac{\varphi}{4}\right)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ begrenzt. Berechnen Sie das Volumen des über dem Bereich B liegenden Teils der Einheitskugel

$$\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}.$$