Serie 18

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online auf `https://echo.ethz.ch` gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis *Mittwoch, 01.04.2020 um 08:00 Uhr* ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!
Die Sterne an den Aufgaben geben die Schwierigkeit an: Einfache Aufgaben, die direkte Anwendungen der Definitionen und Sätze sind werden mit (★) markiert. Zwei Sterne (★★) stehen für fortgeschrittene Anwendungen und Aufgaben mit drei Sternen (★★★) sind auf dem Niveau der Basisprüfung.

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: *Mittwoch, 01.04.2020* bis 12:15 auf `https://sam-up.math.ethz.ch`.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2020/fs/401-0262-G0L`

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. (★½) Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Der Operator $\operatorname{div}(\cdot)$ ordnet einem Vektorfeld $\vec{v}$ ein Skalarfeld $\operatorname{div}\vec{v}$ zu.

(b) $\operatorname{div}\vec{v} = \left(\frac{\partial v_1}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial y}, \frac{\partial v_3}{\partial z}\right)$

(c) $\operatorname{div}\vec{v}$ des Coulombfeldes $\vec{v}$ ist Null.

(d) Der Operator $\operatorname{grad}(\cdot)$ ordnet einem Skalarfeld f ein Vektorfeld $\operatorname{grad} f$ zu.

(e) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v}$ ist eine zulässiger Ausdruck.

2. (★★) Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{v}\colon (x, y, z) \mapsto \bigl(xz^{\alpha}r,\ yz^{\beta}r,\ z^2r^3\bigr) \quad \text{mit} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Für welche Konstanten α und β ist $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$?

(a) $\alpha = 0$ und $\beta = 0$.

(b) $\alpha = 1$ und $\beta = 3$.

(c) $\alpha = 3$ und $\beta = 2$.

(d) $\alpha = 3$ und $\beta = 3$.

3. (★½) Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) $\operatorname{div}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\operatorname{grad}(x + y + z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(x + y + z)) = 0$

(d) $\operatorname{rot}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(e) $\operatorname{div}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3$

4. (★) Ein Vektorfeld $\vec{v}$ heisst quellenfrei wenn $\operatorname{div}\vec{v} = 0$ und wirbelfrei wenn $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$ gilt. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) Quellenfreie Vektorfelder sind auch wirbelfrei.

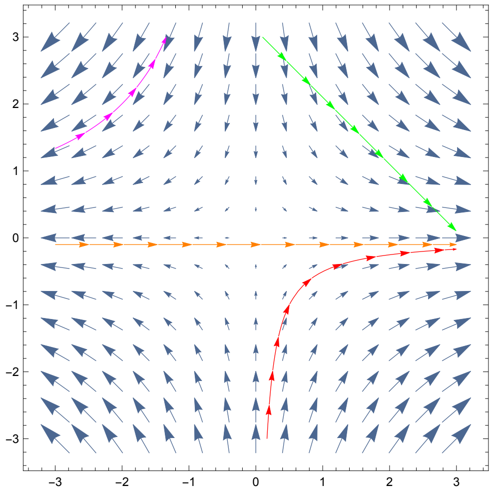
(b) Vektorfelder der Form $\vec{v} = \operatorname{grad} f$ sind quellenfrei.

(c) Vektorfelder der Form $\vec{v} = \operatorname{rot}\vec{w}$ sind quellenfrei.

(d) Vektorfelder der Form $\vec{v} = \operatorname{rot}\vec{w}$ sind wirbelfrei.

Siehe nächstes Blatt!

5. (★½) Welche der folgenden Kurven sind Feldlinien des Vektorfeldes $\vec{v}(x, y) = (x, -y)$?



(a) Die grüne Kurve.

(b) Die rote Kurve.

(c) Die orange Kurve.

(d) Die pinke Kurve.

Bitte wenden!

5'. (★★) Es seien a und c Konstanten. Das Vektorfeld

$$\vec{v}(x,y,z) = c\left(1 - a^2\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, -a^2\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, 0\right)$$

beschreibt die Strömung einer idealen Flüssigkeit um einen Zylinder vom Radius a, dessen Achse mit der z-Achse zusammenfällt (siehe dazu die Abbildung und eine animierte Visualisierung unter folgendem Link: `https://tinyurl.com/ethanalysis-laminarflow`).

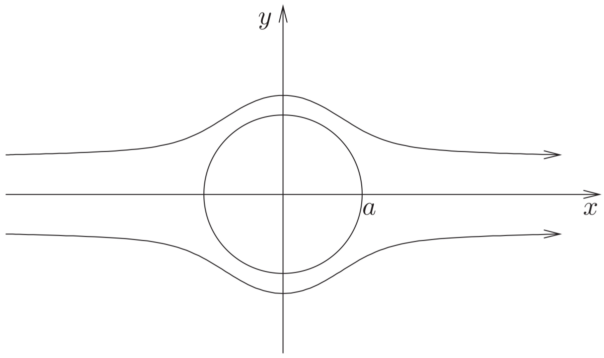
a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{div}\vec{v} = 0$ und

b) dass $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$ gilt,

c) dass an der Oberfläche des Zylinders die Strömung tangential verläuft und

d) dass in grosser Entfernung vom Zylinder das Vektorfeld nahezu homogen ist.

e) Bestimmen Sie weiters die Punkte maximaler und minimaler Geschwindigkeit auf der Zylinderoberfläche.



6. (★★) Gegeben ist das zweidimensionale Vektorfeld $\vec{v}(x,y) = \big(x^2 - y^2, 2xy\big)$. Zeigen Sie, dass die Kreise, welche die x-Achse im Ursprung berühren, Feldlinien sind und bestimmen Sie die Koordinaten der zugehörigen Kreismittelpunkte.

7. (★★½) Ein ebenes Vektorfeld $K(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ wird *harmonisch* genannt, falls

$$\operatorname{div} K = P_x + Q_y = 0 \text{ und } \operatorname{rot} K = Q_x - P_y = 0.$$

Ferner bezeichne K_α das Feld, das entsteht, wenn jeder Feldvektor eines Feldes K um den Winkel α gedreht wird.

Das Feld K sei harmonisch. Zeigen Sie, dass dann auch K_α harmonisch ist.

Hinweis: Ist (x,y) ein Punkt in der Ebene, so berechnet sich der um den Winkel α gedrehte Punkt durch

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

8. (★★½) Eine Gerade geht durch den Punkt $(1,0,0)$ und hat den Richtungsvektor $(0,1,1)$. Lässt man sie um die z-Achse rotieren, so erzeugt sie eine Fläche *(einschaliges Rotationshyperboloid)*.

f) Geben Sie eine Parameterdarstellung dieser Fläche an.

g) Bestimmen Sie die Gleichung dieser Fläche.

h) In welchen Punkten der Fläche ist der Normalenvektor parallel zur Richtung des Vektors $(1,1,-1)$?

i)[1] Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks zwischen den Ebenen $z = 0$ und $z = 2$.

[1]Sie werden am 27. März in der Vorlesung anschauen, wie man den Oberflächeninhalt eines durch eine Parameterdarstellung gegebenen Flächenstucks berechet.