Serie 19

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online auf `https://echo.ethz.ch` gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis *Mittwoch, 08.04.2020 um 08:00 Uhr* ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!
Die Sterne an den Aufgaben geben die Schwierigkeit an: Einfache Aufgaben, die direkte Anwendungen der Definitionen und Sätze sind werden mit (★) markiert. Zwei Sterne (★★) stehen für fortgeschrittene Anwendungen und Aufgaben mit drei Sternen (★★★) sind auf dem Niveau der Basisprüfung.

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: *Mittwoch, 08.04.2020* bis 12:15 auf `https://sam-up.math.ethz.ch`.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2020/fs/401-0262-G0L`

Geogebra-Applets zu Kapitel VI: `https://www.geogebra.org/m/uzebkcz2#chapter/465514`

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. (★½) Die Fläche S sei einerseits durch die Parameterdarstellung $(u, v) \mapsto \vec{r}(u, v)$ und andererseits durch die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ gegeben. Wir betrachten einen festen Punkt P_0 mit Ortsvektor (u_0, v_0) auf der Fläche S. Dann gilt: Die Vektoren $\operatorname{grad}(f(P_0))$ und $\vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0)$

(a) sind gleich.

(b) sind entgegengesetzt gleich.

(c) sind parallel.

(d) stehen senkrecht aufeinander.

(e) sind weder parallel noch stehen sie senkrecht aufeinander.

2. (★★) Es sei eine Fläche durch die Parameterdarstellung $(u, v) \mapsto \vec{r}(u, v)$ gegeben. Der Vektor $\vec{n}(u, v)$ bezeichnet den Normaleneinheitsvektor zur Fläche. Es bezeichne P_0 den Punkt auf der Fläche mit Ortsvektor $\vec{r}(u_0, v_0)$. Klicken Sie die *richtigen* Aussagen an.

(a) Der Vektor $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ liegt in einer Tangentialebene zur Fläche im Punkte P_0.

(b) Wenn $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ und $\vec{r}_v(u_0, v_0)$ linear unabhängig sind, dann spannen sie die Tangentialebene zur Fläche im Punkte P_0 auf.

(c) $\vec{n}(u_0, v_0) = \vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0)$.

(d) Der Vektor $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ ist tangential an die u-Linie, die durch P_0 geht.

3. (★★) Der Oberflächeninhalt des Graphs $z = f(x, y)$ einer Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ ist

(a) $\displaystyle\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

(b) $\displaystyle\iint_D \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

(c) $\displaystyle\iint_D |f_x(x, y) \times f_y(x, y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

Hinweis: Parametrisieren Sie die Fläche durch $\vec{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$.

4. (★½) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{v}\colon (x, y, z) \mapsto \big(x, y^2 + z, 3x\big)$$

durch das Dreieck D mit Ecken $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$ und $(0, 1, 0)$ in Richtung $\vec{n} = (0, 0, 1)$.

(a) $\frac{1}{2}$

(b) 3

(c) $-\frac{1}{2}$

Siehe nächstes Blatt!

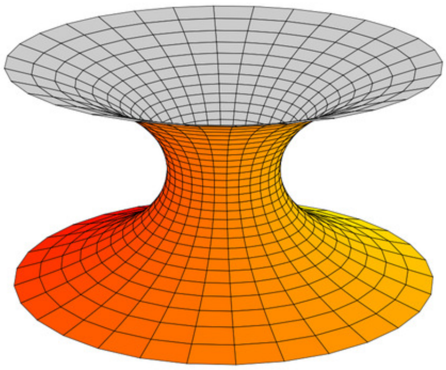
5. (★★) Eine Rotationsfläche $M \subset \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch die Parametrisierung

$$\vec{r}(u, v) = (\cosh(v)\cos(u), \cosh(v)\sin(u), v),$$

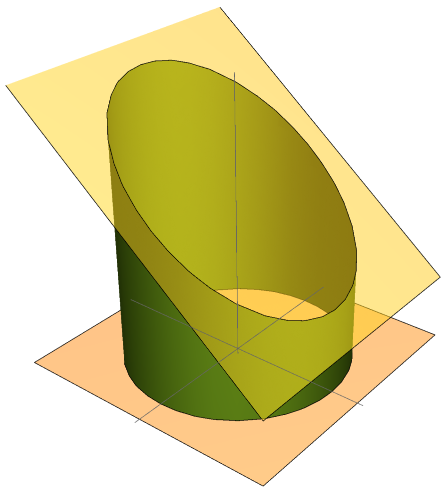
mit $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [-1, 1]$. Die Fläche M heisst Katenoid und ist eine sogenannte Minimalfläche. (Eine Minimalfläche einer Kurve ist eine Fläche, deren Rand gerade die Kurve ist und gleichzeitig unter solchen Flächen ein lokales Minimum im Flächeninhalt hat.)

a) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt $A(M)$.

b) Verifizieren Sie, dass der Flächeninhalt eines Zylindermantels mit Radius $\cosh 1$ und Höhe 2 grösser ist als $A(M)$.

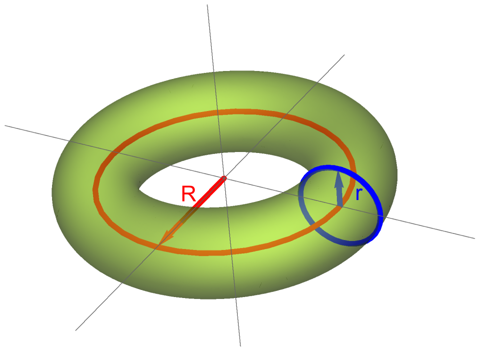


6. (★★½) Bestimmen Sie die Mantelfläche des Zylinders $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 16\}$ zwischen den Ebenen $z = 0$ und $z = 16 - 2x$.



Bitte wenden!

7. (★★★) Berechnen Sie die Oberfläche eines Rotationstorus mit grossem Radius R und kleinem Radius $r < R$ (siehe Abbildung).



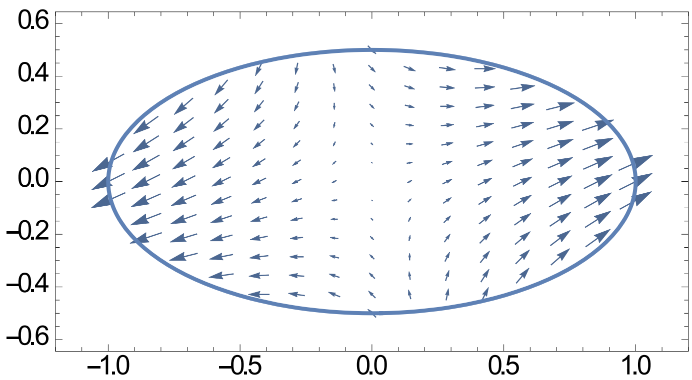
8. (★★) Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{v}(x, y) = (2x + y, x - y)$. In dieser Aufgabe berechnen wir den Fluss von $\vec{v}$ durch die Ellipse $x^2 + 4y^2 = 1$ nach aussen.

a) Parametrisieren Sie die Ellipse durch eine Funktion $\vec{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$.

b) Finden Sie den nach aussen zeigenden Normalenvektor $\vec{n}(t)$ zur Ellipse mit gleicher Länge wie der Tangentialvektor $\dot{\vec{\gamma}}(t)$ am Punkt mit Ortsvektor $\vec{\gamma}(t)$.

c) Berechnen Sie den Fluss von $\vec{v}$ durch die Ellipse nach aussen gegeben durch

$$\int_a^b \vec{v}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{n}(t) dt.$$



9. (★★½) Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{v}(x, y, z) = (1 - x, 1 - y, 1 + z)$$

sowie die Fläche S mit der Parameterdarstellung

$$(u, v) \mapsto \vec{r}(u, v) = (u - v, u + v, uv)$$

und dem Parameterbereich

$$B = \{(u, v) \mid 0 \leq v \leq 1, \ |u| \leq 1 - v\}.$$

Berechnen Sie den Fluss des Feldes $\vec{v}$ von oben nach unten durch die Fläche S.

Eine Visualisierungsmöglichkeit für Flächen mit einem *rechteckigen* B finden Sie unter:
`https://www.geogebra.org/m/uzebkcz2#material/yuxzc5nb`