Serie 20

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online auf `https://echo.ethz.ch` gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis *Mittwoch, 22.04.2020 um 08:00 Uhr* ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!
Die Sterne an den Aufgaben geben die Schwierigkeit an: Einfache Aufgaben, die direkte Anwendungen der Definitionen und Sätze sind werden mit (★) markiert. Zwei Sterne (★★) stehen für fortgeschrittene Anwendungen und Aufgaben mit drei Sternen (★★★) sind auf dem Niveau der Basisprüfung.

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: *Mittwoch, 22.04.2020* bis 12:15 auf `https://sam-up.math.ethz.ch`.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2020/fs/401-0262-G0L`

Geogebra-Applets zu Kapitel VI: `https://www.geogebra.org/m/uzebkcz2#chapter/465514`

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. (★½) Es sei B die Einheitskugel um den Ursprung. Für welches der Vektorfelder $(x, y, z) \mapsto \vec{v}(x, y, z)$ darf der Divergenzsatz für den Bereich B *nicht* angewendet werden?

(a) $\vec{v}(x, y, z) = (x, y, z)$

(b) $\vec{v}(x, y, z) = C \cdot \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$ (wobei $\vec{r} = (x, y, z)$ ist)

(c) $\vec{v}(x, y, z) = (xyz, x^2z^2, x^3ze^y)$

(d) $\vec{v}(x, y, z) = \vec{\omega} \times \vec{r}$ (wobei $\vec{\omega}$ ein beliebiger Vektor ist)

(e) $\vec{v}(x, y, z) = \vec{a}$ (wobei $\vec{a}$ ein beliebiger Vektor ist)

(f) $\vec{v}(x, y, z) = (\ln x, \ln y, \ln z)$

Bitte wenden!

2. (★⯨) Ein Vektorfeld $\vec{v}$ heisst quellenfrei wenn $\operatorname{div}\vec{v} = 0$ und wirbelfrei wenn $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$ gilt. Klicken Sie die richtige Aussage an.

(a) Quellenfreie Vektorfelder sind auch wirbelfrei.

(b) Vektorfelder der Form $\vec{v} = \operatorname{grad} f$ sind quellenfrei.

(c) Vektorfelder der Form $\vec{v} = \operatorname{rot}\vec{w}$ sind quellenfrei.

(d) Vektorfelder der Form $\vec{v} = \operatorname{rot}\vec{w}$ sind wirbelfrei.

3. (★★) Welche der folgenden fünf Aussagen ist logisch unabhängig von den anderen vieren? (Das heisst, welche Aussage folgt nicht aus einer anderen und hat auch keine der anderen Aussagen als Konsequenz?)

(a) Das Vektorfeld $\vec{v}$ ist quellenfrei.

(b) Der Fluss Φ von $\vec{v}$ durch irgend eine geschlossene Fläche ist Null.

(c) div $\vec{v} = 0$.

(d) rot $\vec{v} = (0, 0, 0)$.

(e) Das Vektorfeld $\vec{v}$ könnte das Strömungsfeld einer inkompressiblen Flüssigkeit sein.

4. (★⯨) Die Arbeit W eines Vektorfeldes $\vec{v}$ längs des Geradenstücks von $(1, 0, 0)$ nach $(-1, -1, -1)$ sei gleich 5. Welches Resultat erhält man, wenn man die Arbeit W' von $\vec{v}$ längs des Geradenstücks von $(-1, -1, -1)$ nach $(1, 0, 0)$ berechnet?

(a) Die Arbeit W' lässt sich aus den Angaben nicht berechnen.

(b) Die Arbeit W' beträgt ebenfalls 5.

(c) Die Arbeit W' beträgt -5.

5. (★★) Ein Vektorfeld $\vec{v}(x, y, z)$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}^3$ erfülle $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$. Was folgt?

(a) Der Fluss $\int_D \vec{v} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}F$ durch jede Kreisscheibe D in der xy-Ebene verschwindet.

(b) Der Fluss $\int_S \vec{v} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}F$ durch jede Kugeloberfläche S verschwindet.

Siehe nächstes Blatt!

6. (★★½) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\vec{v}(x,y,z) = (x,y,z)$ durch das Paraboloid

$$P = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2,\, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

von oben nach unten.

7. (★★★)

a) Berechnen Sie den Fluss Φ des Vektorfeldes

$$\vec{v} : (x,y,z) \longmapsto \left(\frac{1}{3}x^3 - xz, xy + yz, y^2 z - xz\right)$$

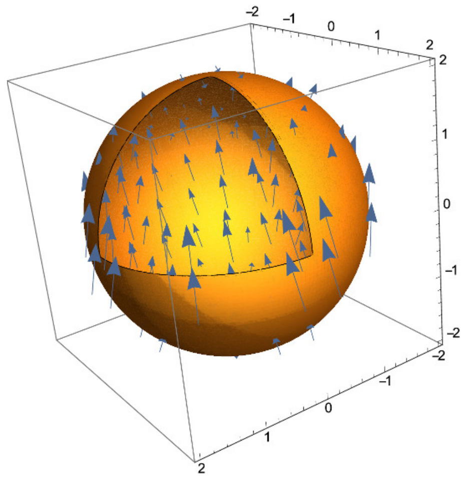
von innen nach aussen durch die Oberfläche des geraden Kreiskegels mit Spitze in $(0,0,2)$ und Grundfläche $\left\{(x,y,z)\,\middle|\, z = 0\,,\, x^2 + y^2 \leq 4\right\}$.

b) Sei $R > 0$ fest gewählt. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{v} : (x,y,z) \longmapsto \left(R\left(y^2 + z^2\right), R^2\left(x^2 + z^2\right), R^3\left(x^2 + y^2\right)\right)$$

von innen nach aussen durch die Oberfläche

$$E := \left\{(x,y,z)\,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \leq 0 \,\text{oder}\, y \leq 0 \,\text{oder}\, z \leq 0\right\}.$$



8. (★★½) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfelds

$$\vec{v}(x,y,z) = (xyz,\ y\sin(xz),\ x^3 + y^3 + z^3)$$

durch die Oberfläche des Würfels

$$W = \{(x,y,z) \mid -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1,\ -1 \leq z \leq 1\}$$

von innen nach aussen.

Bitte wenden!

9. (★★★) Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ Konstanten mit $a \neq 0$ und $b \neq -2$. Ein zweidimensionales Kraftfeld $\vec{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist durch die Gleichung

$$\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} cxy \\ x^6 y^2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Die Kraft wirkt auf ein Teilchen, das sich entlang der Kurve $y = ax^b$ vom Ursprung bis zum Punkt mit x-Koordinate 1 bewegt.

a) Berechnen Sie, als Funktion von a, b und c, die Arbeit W, welche durch die Kraft $\vec{f}$ am Teilchen verrichtet wird.

b) Welche Beziehung muss zwischen a und c gelten, damit die Arbeit W unabhängig von b ist?

c) Wie gross ist die Arbeit W in diesem Fall? Drücken Sie W in Abhängigkeit von c aus.