Serie 21

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online auf `https://echo.ethz.ch` gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis *Mittwoch, 29.04.2020 um 08:00 Uhr* ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!
Die Sterne an den Aufgaben geben die Schwierigkeit an: Einfache Aufgaben, die direkte Anwendungen der Definitionen und Sätze sind werden mit (★) markiert. Zwei Sterne (★★) stehen für fortgeschrittene Anwendungen und Aufgaben mit drei Sternen (★★★) sind auf dem Niveau der Basisprüfung.

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: *Mittwoch, 29.04.2020* bis 12:15 auf `https://sam-up.math.ethz.ch`.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2020/fs/401-0262-G0L`

Geogebra-Applets zu Kapitel VI: `https://www.geogebra.org/m/uzebkcz2#chapter/465514`

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. (★★) Das Arbeitsintegral $\int_\gamma \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ des Vektorfeldes

$$\vec{v}(x,y,z) = \left(e^{y^2} + e^{z^2},\ \ (2z+1)xe^{z^2} + (2x+1)ye^{y^2},\ \ xyze^{x^2+y^2}\right)$$

entlang des geschlossenen Weges γ, welcher aus den Seiten des Dreieckes mit den Eckpunkten $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(-1,0,0)$ besteht und im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird, beträgt:

(a) 1

(b) -1

(c) 2

2. (★½) Welches der folgenden Vektorfelder hat ein Potential auf $\mathbb{R}^2$?

(a) $(x - y,\, x - y)$

(b) $(x^2 - y,\, x^3 + 2xy)$

(c) $(x^3 + 2xy,\, x^2 - y)$

(d) $(x^3 - xy^2,\, x^2y - y^5)$

3. (★½) Sei $\vec{v}$ ein Vektorfeld auf $D \subset \mathbb{R}^3$, sodass

$$\int_W \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0$$

für alle geschlossene Wege W in D. Was folgt?

(a) Die Arbeit $\int_W \vec{v} \cdot d\vec{r}$ hängt nur von Anfangs- und Endpunkt des Wegs W ab.

(b) $\operatorname{rot} \vec{v} = (0, 0, 0)$

(c) $\operatorname{div} \vec{v} = 0$

(d) $\int_W \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0$ für alle Wege W.

(e) Es existiert eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, sodass $\vec{v} = \operatorname{grad} f$.

4. (★★) Wie gross ist die Arbeit, welche das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \longmapsto \left(x^2 + z^2, 4y - z, 2xz + 2y\right)$$

entlang des Einheitskreises γ in der (y, z)–Ebene leistet? (Der Durchlaufsinn von γ bilde mit der x–Achse eine Rechtsschraube, schaut man also entlang der positiven Richtung der x-Achse, so wird γ im Uhrzeigersinn durchlaufen.)

(a) π.

(b) 3π.

(c) $\frac{\pi}{2}$.

(d) 0.

Siehe nächstes Blatt!

5. (★★) Für den Parameter $a \in \mathbb{R}$ ist das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \longmapsto \left(\ln\left(1 + x^2\right) + ay^2, xy + y^2, z^3\right)$$

gegeben. Welchen Wert muss a annehmen, so dass es eine Funktion $f = f(x, y, z)$ mit $\vec{v} = \operatorname{grad} f$ gibt? f muss dabei nicht bestimmt werden.

(a) $a = 0$.

(b) $a = -1/2$.

(c) $a = 1/2$.

(d) $a = 1/2$ und $a = -1/2$.

(e) Es gibt kein solches a, da der Definitionsbereich von $\vec{v}$ nicht einfach zusammenhängend ist.

6. (★★) Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ sind einfach zusammenhängend?

(a) Hohlkugel $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

(b) Gefüllter Torus

(c) $\mathbb{R}^3 \setminus x-$Achse

(d) $\mathbb{R}^3 \setminus \{(1, 2, 3)\}$

(e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \geq 1\}$

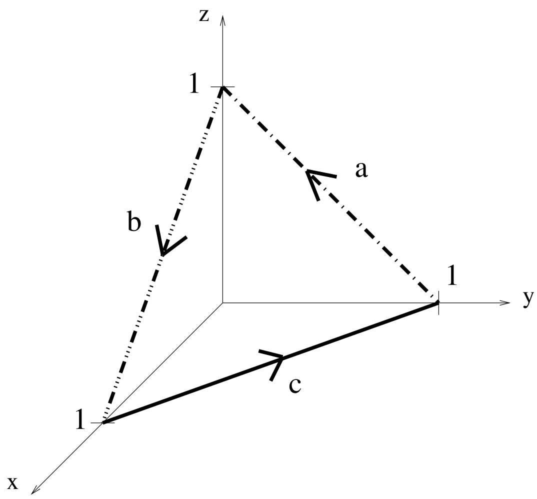
7. (★★) Es sei das Vektorfeld $\vec{v}$ durch

$$\vec{v}\colon\ (x,y,z) \mapsto \big(-x^3 - 2x + z, -y^3 - 2y + x, -z^3 - 2z + y\big)$$

und der Weg γ wie in der untenstehenden Figur definiert (er folgt zunächst a, dann b und schliesslich c). Berechnen Sie das Integral $\int_\gamma \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$

a) direkt;

b) mit Hilfe des Satzes von Stokes.

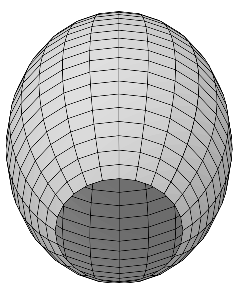


8. (★★½) Ein Heissluftballon habe die Form einer Sphärenkappe (also einer Kugeloberfläche mit horizontalem Schnitt) vom Radius R und Öffnungsdurchmesser $d < 2R$, wie in der untenstehenden Figur. Das heisse Gas dringt durch die poröse Oberfläche B der Kappe mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = \operatorname{rot} \vec{F}$, wobei $\vec{F}(x,y,z) = (-y, x, 0)$. Berechnen Sie den Fluss $\iint_B \vec{v} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}\mathcal{O}$ durch die Ballonoberfläche B

a) direkt;

b) mit dem Satz von Gauss;

c) mit dem Satz von Stokes.



Siehe nächstes Blatt!

9. (★★⯨) Wir betrachten das wirbelfreie Vektorfeld (Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters, vgl. Kap. VI, S. 14)

$$\vec{v} : (x, y, z) \longmapsto \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

aber jetzt nur im Halbraum $x > 0$. Dieser Definitionsbereich ist einfach zusammenhängend. Also besitzt $\vec{v}$ darin ein Potential f.

a) Berechnen Sie f durch Bestimmung der Arbeit von $\vec{v}$ vom Punkt $(1, 0, 0)$ zum Punkt (x, y, z) längs eines geeigneten Weges.

b) Verifizieren Sie, dass $\operatorname{grad} f = \vec{v}$ ist.

10. (★★⯨)

a) Berechnen Sie das Potential des Kraftfeldes $(x + z^2, yz, \frac{y^2}{2} + 2xz)$. Wie gross ist die verrichtete Arbeit, wenn man vom Punkt $(1, 0, 0)$ nach $(2, 1, 3)$ geht?

b) Gegeben sei das Kraftfeld $(x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$. Berechnen Sie die Arbeit, wenn man sich entlang der spiralförmigen Kurve $(t\cos(t), t\sin(t), t)$ für $0 \leq t \leq R$ bewegt.

c) Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \longmapsto \left(5005x^{1000}y^3z, 15x^{1001}y^2z + 2y, 5x^{1001}y^3\right).$$

Berechnen Sie die Arbeit A von $\vec{v}$ entlang der Strecke von $P = (1, 0, 1)$ nach $Q = (0, 1, 1)$.