Serie 22

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online auf `https://echo.ethz.ch` gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis *Mittwoch, 06.05.2020 um 08:00 Uhr* ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!
Die Sterne an den Aufgaben geben die Schwierigkeit an: Einfache Aufgaben, die direkte Anwendungen der Definitionen und Sätze sind werden mit (★) markiert. Zwei Sterne (★★) stehen für fortgeschrittene Anwendungen und Aufgaben mit drei Sternen (★★★) sind auf dem Niveau der Basisprüfung.

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: *Mittwoch, 06.05.2020* bis 12:15 auf `https://sam-up.math.ethz.ch`.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2020/fs/401-0262-G0L`

Geogebra-Applets zu Kapitel VII: `https://www.geogebra.org/m/uzebkcz2#chapter/479068`

Die Aufgaben 5, 7, 8 und 9 verwenden Material aus Kapitel VII.4, welches am Mittwoch, den 29. April, in der Vorlesung behandelt wird. Wenn Sie bereits vorher mit dem Lösen beginnen wollen, lesen Sie Kapitel VII.4 selbst, es ist nicht kompliziert.

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. (★) Welche Ordnung hat die Differentialgleichung $y'' - x^2 y' + y^4 = 0$?

(a) -1

(b) 0

(c) 1

(d) 2

(e) 4

2. (★☆) Klicken Sie die **falsche** Aussage an:

Die Differenzialgleichung $\frac{x^2}{2}y'' - xy' + y = 0$

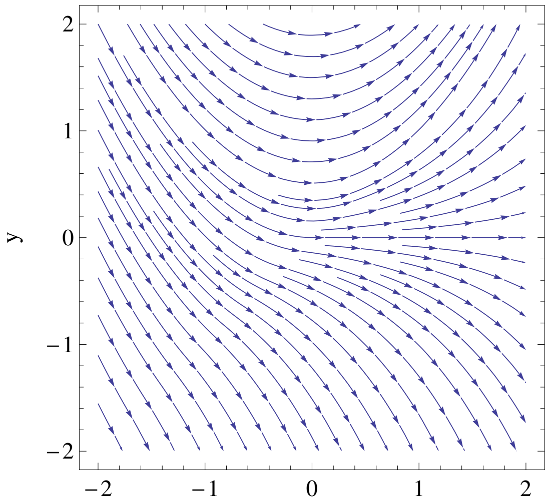
(a) besitzt die Funktion $y : x \to x$ als Lösung;

(b) besitzt die Funktion $y : x \to x^2$ als Lösung;

(c) besitzt unendlich viele Lösungen;

(d) besitzt genau zwei Lösungen.

3. (★☆) Welche der folgenden Differentialgleichungen hat das gegebene Richtungsfeld?



(a) $y' = x + y$

(b) $y' = x - y$

(c) $y' = \min\{x, y\}$

(d) $y' = \max\{x, y\}$

(e) $y' = |y| - |x|$

Siehe nächstes Blatt!

4. (★★) Sei $x \mapsto y(x)$ eine beliebige Funktion. Betrachten Sie die Tangente an den Graphen der Funktion. Wie lautet die Differenzialgleichung dafür, dass diese Tangente die x-Achse im vorgegebenen Abstand c vom Punkt $(x, 0)$ schneidet?

(a) $x - \frac{y}{y'} = c$

(b) $\frac{y}{y'} = c$

(c) $yy' = c$

(d) $\left|\frac{y}{y'}\right| = c$

5. (★⯨) Die Substitution

$$y(x) = g(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

in der Differenzialgleichung

$$x^2 y + 2xy' + y'' = -2\cos(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

liefert...

(a) $x^2 g + 2xg' + g'' = -2\cos x$

(b) $-x^2 g + 2xg' + g'' = -2\cos x$

(c) $g'' - g = -2\cos x$

(d) $g'' - xg' = -2\cos x$

Bitte wenden!

6. (★★)

a) Bestimmen Sie ein ebenes Vektorfeld $\vec{v}(x, y)$, welches als Feldlinien alle Kreise mit Mittelpunkt in $(1, 1)$ besitzt.

b) Die Feldlinien des Vektorfelds $\vec{w}(x, y) := (x, y + 1)$ sind für $x \neq 0$ Graphen von Lösungen einer Differentialgleichung. Wie lautet diese Differentialgleichung? Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

7. (★★) Bestimmen Sie die Lösung folgender Anfangswertprobleme (alle diese Differenzialgleichungen sind separierbar):

a) $\left(x^2 + 3\right) y' + 2xy = x$, mit $y(0) = 1$.

b) $y' = xe^{x+y}$, mit $y(1) = -1$.

c) $y' = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 x}$, mit $y(\frac{\pi}{2}) = 0$.

d) $yy' = xy^2 + 2x$, mit $y(-1) = -1$. Existenzintervall?

e) $y' = \alpha\sqrt{y} - \beta y$, mit $y(0) = 0$.

f) $\left(x^2 + x - 6\right) y' = \frac{5}{2y}$, mit $x > 5$ und $\lim_{x\to\infty} y(x) = -1$.

8. (★★½) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'x^2 = -xy - x^2 - y^2.$$

Finden Sie die Lösung, die durch die Anfangsbedingung $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ gegeben ist, und bestimmen Sie deren Nullstellen.

Hinweis: Substitution!

9. (★★) Finden Sie die Lösung $t \mapsto x(t)$ der Differentialgleichung

$$\ddot{x} = -\dot{x}^2 + 1$$

mit Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 0$, und diskutieren Sie das Verhalten der Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ für $t \to \infty$.

Hinweis: Betrachten Sie zuerst $v(t) = \dot{x}(t)$.