D-MAVT/D-MATL
Dr. Andreas Steiger

Analysis II

FS 2020

Serie 23

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online auf `https://echo.ethz.ch` gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis *Mittwoch, 13.05.2020 um 08:00 Uhr* ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!
Die Sterne an den Aufgaben geben die Schwierigkeit an: Einfache Aufgaben, die direkte Anwendungen der Definitionen und Sätze sind werden mit (★) markiert. Zwei Sterne (★★) stehen für fortgeschrittene Anwendungen und Aufgaben mit drei Sternen (★★★) sind auf dem Niveau der Basisprüfung.

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: *Mittwoch, 13.05.2020* bis 12:15 auf `https://sam-up.math.ethz.ch`.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2020/fs/401-0262-G0L`

Geogebra-Applets zu Kapitel VII: `https://www.geogebra.org/m/uzebkcz2#chapter/479068`

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. (★) Gegeben ist eine lineare und homogene Differentialgleichung, welche $y : x \mapsto \sin x$ als Lösung besitzt. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) $x \mapsto \cos x$ ist ebenfalls eine Lösung.

(b) $x \mapsto \sin(2x)$ ist ebenfalls eine Lösung.

(c) $x \mapsto 2\sin(x)$ ist ebenfalls eine Lösung.

(d) $x \mapsto \sin(x) + 2x$ ist ebenfalls eine Lösung.

Bitte wenden!

2. (★★) Welche der folgenden Aussagen stimmen?

(a) Jede separierbare Differentialgleichung ist eine homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung.

(b) Jede lineare Differentialgleichung 1. Ordnung ist separierbar.

(c) Jede homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung ist separierbar.

(d) Jede homogene Differentialgleichung 1. Ordnung ist separierbar.

3. (★⯨) Bestimmen Sie durch Einsetzen die allgemeine Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung

$$2y'' - y' - 6y = e^{3x}.$$

(a) $y(x) = C_1\, e^{2x} + C_2\, e^{-\frac{3}{2}x}$.

(b) $y(x) = C_1\, e^{2x} + C_2\, e^{-\frac{3}{2}x} + \frac{1}{9}e^{3x}$.

(c) $y(x) = C_1\, e^{x} + C_2\, e^{-\frac{3}{2}x} + \frac{1}{9}e^{3x}$.

4. (★⯨) Das Wachstum einer Taufliegen-Population unter Laborbedingungen kann näherungsweise durch die Differentialgleichung

$$\dot{f}(t) = 0.0006 \cdot (350 - f(t)) \cdot f(t)$$

beschrieben werden. Dabei bezeichnet $f(t)$ die Anzahl der Taufliegen zur Zeit t in Tagen. Für welche Zahlen $a > 0$ ist die Funktion

$$f(t) = \frac{350}{a \cdot e^{-0.21t} + 1}$$

eine Lösung der Differentialgleichung?

(a) Für kein a.

(b) Nur für $a = 350 = \lim_{t\to\infty} f(t)$.

(c) Nur für $a = \log|-0.21|$.

(d) Nur für $a = \log\left|\frac{1}{-0.21}\right|$.

(e) Für jedes a.

5. (★★) Klicken Sie die *richtigen* Aussagen an:

Die Differentialgleichung $y' = \frac{1}{x^2}y + \sin x$

(a) ist linear.

(b) lässt sich durch eine Substitution $u = \frac{y}{x}$ lösen.

(c) ist separierbar.

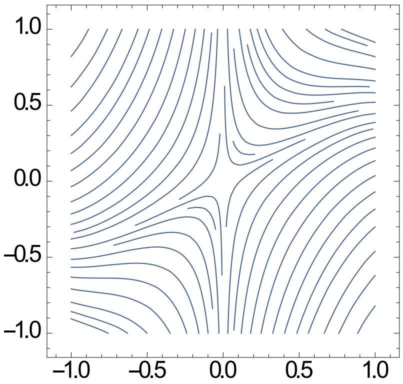
(d) lässt sich durch eine Substitution $u = x + y$ lösen.

Siehe nächstes Blatt!

6. (★★½) Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = -\frac{y}{x} + \cos\left(x^2\right).$$

Die Lösungskurven sehen Sie rechts.



7. (★★) Lösen Sie Differenzialgleichung

$$1 - x^2 + y^2 = 2xyy'$$

mit Hilfe der Substitution $u(x) = (y(x))^2$.

8. (★★★) Finden Sie alle Kurven, gegeben durch $y = y(x)$, welche die folgende Bedingung erfüllen: Es sei t die Tangente im Punkt P der Kurve und Q ihr Schnittpunkt mit der y–Achse. Dann liegt der Mittelpunkt der Strecke $\overline{PQ}$ auf der Geraden, gegeben durch $y = x$.

9. (★★½) Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{2 - \sin(x + 2y)}{2\sin(x + 2y)} \; .$$

Hinweis: Substitution.