D-MAVT/D-MATL | Analysis II | FS 2020
Dr. Andreas Steiger

Serie 24

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online auf `https://echo.ethz.ch` gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis *Mittwoch, 20.05.2020 um 08:00 Uhr* ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!
Die Sterne an den Aufgaben geben die Schwierigkeit an: Einfache Aufgaben, die direkte Anwendungen der Definitionen und Sätze sind werden mit (★) markiert. Zwei Sterne (★★) stehen für fortgeschrittene Anwendungen und Aufgaben mit drei Sternen (★★★) sind auf dem Niveau der Basisprüfung.

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: *Mittwoch, 20.05.2020* bis 12:15 auf `https://sam-up.math.ethz.ch`.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2020/fs/401-0262-G0L`

Geogebra-Applets zu Kapitel VII: `https://www.geogebra.org/m/uzebkcz2#chapter/479068`

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. (★½) Gegeben seien Funktionen s, t : $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Welche aus den folgenden Bedingungen garantieren die Exaktheit der Differenzialgleichung $s(x,y) = t(x,y) \cdot y'$?

(a) Für alle (x,y): $s_y(x,y) = t_x(x,y)$.

(b) Für alle (x,y): $s_x(x,y) = t_y(x,y)$.

(c) Für alle (x,y): $s_y(x,y) = -t_x(x,y)$.

(d) Für alle (x,y): $s_x(x,y) = -\frac{1}{t_y(x,y)}$.

(e) Keine.

Bitte wenden!

2. (★½) Welche aus den folgenden Gleichungen sind exakt?

(a) $e^x \sin y + 3y - (3x - e^x \sin y)y' = 0$.

(b) $\left(\frac{y}{x} + 6x\right) + (\log x - 2)y' = 0$, $x > 0$.

(c) $(y \log x + xy)y' = -x \log y - xy$.

(d) $y' = -\frac{ax+by}{bx+cy}$, $a, b, c, d > 0$ Konstanten.

3. (★★) Welche Aussagen über die Orthogonaltrajektorien der Kurvenschar

$$x^2 + Cy^2 = 1$$

mit Scharparameter C sind korrekt?

(a) Die y–Achse ist eine Orthogonaltrajektorie.

(b) Alle Orthogonaltrajektorien, welche den Punkt $(0, 0)$ nicht treffen, sind geschlossene Kurven.

(c) Die Kurven der Form $y^2 + x^2 - \ln|x| = K$ mit $K \geq 1$ sind Orthogonaltrajektorien.

(d) Die Kurven der Form $y^2 + x^2 - \ln(x^2) = K$ mit $K \geq 1$ sind Orthogonaltrajektorien.

4. (★½) Die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei das Potential eines Vektorfelds $\vec{v} = \operatorname{grad} g$. In welcher Beziehung stehen die Niveaulinien von g mit den Feldlinien von $\vec{v}$?

(a) Die Niveaulinien von g und die Feldlinien von $\vec{v}$ sind (abgesehen von der Orientierung) gleich.

(b) Die Niveaulinen von g und die Feldlinien von $\vec{v}$ sind Orthogonaltrajektorien voneinander.

(c) Es gibt keinen Zusammenhang dieser Art.

Siehe nächstes Blatt!

5. (★★½) Bestimmen Sie die Kurvenschar der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung

$$y^2 \cdot (y')^2 + y^2 - 1 = 0, \quad y = y(x) > 0$$

sowie ihre Enveloppen.

6. (★★) Bestimmen Sie die Orthogonaltrajektorien der Kurvenschar

$$\frac{y-1}{x-1} = C.$$

Skizzieren Sie diese Trajektorien.

7. (★★) Gegeben sei die Differentialgleichung

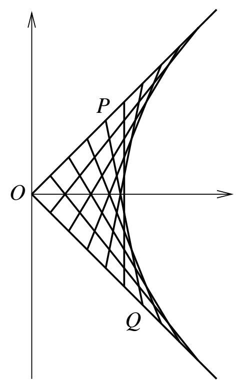
$$y - xy' = \sqrt{(y')^2 + 1}.$$

Bestimmen Sie die allgemeine und die singuläre Lösung. Welche geometrische Form hat die Enveloppe der Lösungsschar?

8. (★★½) Seien P und Q Punkte auf den Winkelhalbierenden des ersten bzw. zweiten Quadranten. Berechnen Sie die Enveloppe der Schar der Geraden $\overline{PQ}$, für die die Summe der Längen

$$PO + QO = 2\sqrt{2}$$

ist. (O ist der Koordinatenursprung.)



Bitte wenden!

9. (★★★) Sei $y' = f(x,y)$ eine Differentialgleichung erster Ordnung, die den Existenzsatz erfüllt, d.h. die zugehörige Lösungskurvenschar ist regulär. Sei α ein beliebiger Winkel. Ziel dieser Aufgabe ist es, eine weitere Differentialgleichung 1. Ordnung zu finden, deren Lösungskurvenschar der ursprünglichen Differentialgleichung an jeder Stelle mit Winkel α schneidet.

a) Zeigen Sie: Ein ebener Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ lässt sich durch Multiplikation mit der Rotationsmatrix

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

drehen: Der Vektor $\vec{w} = R_\alpha \cdot \vec{v}$ ist gleich lang wie $\vec{v}$, der Winkel zwischen $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ist gerade α.

b) Nehmen Sie an, dass $\cos\alpha - f(x,y)\sin\alpha \neq 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Benützen Sie die Beschreibung von Lösungen von Differentialgleichungen als Feldlinien von Vektorfeldern und Teil (a), um zu zeigen, dass die Lösungskurven der Differentialgleichung

$$y' = \frac{\sin\alpha + f(x,y)\cos\alpha}{\cos\alpha - f(x,y)\sin\alpha}$$

die Lösungskurven der Differentialgleichung $y' = f(x,y)$ im Winkel α schneiden.

c) Es sei $\alpha = \pi/4$ und $f(x,y) = \frac{1}{2}\sin(x+y)$. Bestimmen Sie eine Differentialgleichung $y' = g(x,y)$ deren Lösungskurven die Lösungskurven von $y' = f(x,y)$ überall im Winkel α schneiden.