Serie 25

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online auf `https://echo.ethz.ch` gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis *Mittwoch, 27.05.2020 um 08:00 Uhr* ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!
Die Sterne an den Aufgaben geben die Schwierigkeit an: Einfache Aufgaben, die direkte Anwendungen der Definitionen und Sätze sind werden mit (★) markiert. Zwei Sterne (★★) stehen für fortgeschrittene Anwendungen und Aufgaben mit drei Sternen (★★★) sind auf dem Niveau der Basisprüfung.

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: *Mittwoch, 27.05.2020* bis 12:15 auf `https://sam-up.math.ethz.ch`.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2020/fs/401-0262-G0L`

Geogebra-Applets zu Kapitel VII: `https://www.geogebra.org/m/uzebkcz2#chapter/479068`

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. (★) Wie lautet die charakteristische Gleichung der Differentialgleichung $y''' + 2y' + y = 0$?

(a) $\lambda^3 + 2\lambda + 1 = 0$

(b) $\lambda^3 + 2\lambda = 0$

(c) $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

(d) $\lambda^3 + 2\lambda^2 + 1 = 0$

Bitte wenden!

2. (★½) Was kann man über eine Differentialgleichung der Form $y'' + ay' + by = e^x$ mit konstanten Koeffizienten a und b immer sagen?

(a) Ihre Lösungsmenge ist ein Vektorraum der Dimension 2.

(b) Sie hat eine partikuläre Lösung der Gestalt αe^x für eine Konstante α.

(c) Ihre allgemeine Lösung lautet $y_h(x) + \alpha e^x$, wobei y_h die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung ist und α eine Konstante ist.

(d) Sie hat eine partikuläre Lösung der Gestalt $(\alpha + \beta x + \gamma x^2)\, e^x$ für Konstanten $\alpha,\ \beta,\ \gamma$.

3. (★★) Welche der folgenden Aussagen über die Differentialgleichung $y'' + 3y' + 2y = 0$ sind richtig?

(a) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$ und $y(1) = 1 - e$.

(b) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$ und $y(1) = 0$.

(c) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 1 - e$ und $y(1) = 0$.

(d) Es existiert eine Lösung mit $y(0) = 1$ und $y(x)$ konvergiert für $x \to \infty$.

(e) Es existiert eine Lösung mit $y(0) = 1$ und $y(x)$ konvergiert für $x \to -\infty$.

(f) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

(g) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -3$.

(h) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$.

(i) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

4. (★½) Die allgemeine Lösung der Euler'schen Differentialgleichung

$$x^2 y'' - xy' + y = 0$$

ist gleich...

(a) $y(x) = C_1 x + C_2 x \ln x + C_3 x (\ln x)^2$

(b) $y(x) = C_1 x + C_2 x^2$

(c) $y(x) = C_1 x \ln x + C_2 (\ln x)^2$

(d) $y(x) = C_1 x + C_2 x \ln x$

Siehe nächstes Blatt!

5. (★★) Das Indexpolynom einer homogenen Eulerschen Differentialgleichung der Ordnung 4 hat die doppelte komplexe Nullstelle $\alpha = \pm i$. Wie lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung?

(a) $C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)$

(b) $C_1 \cos(x) + C_2 x \cos(x) + C_3 \sin(x) + C_4 x \sin(x)$

(c) $C_1 + C_2 \cos(\ln x) + C_3 (\ln x) \cos(\ln x) + C_4 \sin(\ln x) + C_5 (\ln x) \sin(\ln x)$

(d) $C_1 \cos(\ln x) + C_2 (\ln x) \cos(\ln x) + C_3 \sin(\ln x) + C_4 (\ln x) \sin(\ln x)$

(e) $C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x) + C_3$

6. (★★) Betrachten Sie die 3-parametrige, reguläre Kurvenschar

$$y(x) = C_1 \cosh(C_3 x) + C_2 \sinh(C_3 x)$$

mit den Parametern $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$. Finden Sie eine zugehörige Differentialgleichung.

7. (★★★)

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'' + 2y' + y = 4e^{-x}$.

b) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$y'' + 4y' = xe^x, \quad x \in (-\infty, \infty)$$
$$y(0) = y'(0) = 0.$$

c) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung $y''' + y'' + y' + y + x + 1 = 0$ mit $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$.

8. (★★★) Gegeben sei die Differentialgleichung mit Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$y'' - (2\alpha - 4)y' + (8 - 4\alpha)y = 0.$$

a) Für welche Werte von α gibt es sowohl nicht-triviale[1] Lösungen, die für $x \to \infty$ konvergieren als auch Lösungen, die für $x \to \infty$ nicht konvergieren?

b) Für welche α gibt es mindestens eine mit $x \to \infty$ konvergente Lösung $y(x)$, die nicht gegen 0 strebt?

9. (★★½) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'' - \dfrac{1}{x}y' + \dfrac{1}{x^2}y = 1, \\ y(1) = y'(1) = 0 \end{cases}$$

für die Funktion $y = y(x)$, $x > 0$.

Hinweis: Für die partikuläre Lösung können Sie den Ansatz $y_p(x) = A + Bx + Cx^2$ wählen.

[1] d.h. y ist nicht die konstante 0-Funktion