Serie 26

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online auf `https://echo.ethz.ch` gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis *Mittwoch, 03.06.2020 um 08:00 Uhr* ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!
Die Sterne an den Aufgaben geben die Schwierigkeit an: Einfache Aufgaben, die direkte Anwendungen der Definitionen und Sätze sind werden mit (★) markiert. Zwei Sterne (★★) stehen für fortgeschrittene Anwendungen und Aufgaben mit drei Sternen (★★★) sind auf dem Niveau der Basisprüfung.

Diese Serie wird nicht abgegeben.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2020/fs/401-0262-G0L`

Geogebra-Applets zu Kapitel VII: `https://www.geogebra.org/m/uzebkcz2#chapter/479068`

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. (★★) Es ist das folgende autonome System

$$\dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 + 3$$
$$\dot{x}_2 = 2x_1 + x_2$$

von linearen Differenzialgleichungen 1. Ordung gegeben. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Es gibt keinen Gleichgewichtspunkt.

(b) $(0, 0)$ ist Gleichgewichtspunkt.

(c) $(1, -2)$ ist Gleichgewichtspunkt.

(d) $(-1, 2)$ ist Gleichgewichtspunkt.

2. (★½) Betrachten Sie das folgende System

$$\begin{cases} \dot{x} = bx - y \\ \dot{y} = x - by. \end{cases}$$

Für $b = 1$ ist die Lösung zu den Anfangsbedingungen $x(0) = 1, y(0) = 0$ gleich...

(a) $x(t) = e, y(t) = te^t$

(b) $x(t) = t + 1, y(t) = t$

(c) $x(t) = t, y(t) = t$

(d) $x(t) = e^t, y(t) = te^t$

3. (★★½) Für die Lösung $(x(t), y(t))$ des Systems

$$\begin{cases} \dot{x} + \dot{y} = 4\,x, \\ \dot{x} - \dot{y} = 6\,y, \end{cases}$$

welche die Anfangsbedingungen $x(0) = 1$ und $y(0) = 0$ erfüllt, gilt

(a) $x(1) + y(1) = 2e^3$.

(b) $2x(1) + y(1) = 2e^3$.

(c) $x(1) + 2y(1) = 2e^3$.

(d) $x(1) + y(1) = e^3$.

4. (★★) Welche der folgenden Aussagen über die Lösungen der Differentialgleichung

$$y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0$$

sind korrekt?

(a) Für eine Potenzreihe $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, die die Gleichung löst, gilt $(n+2)a_{n+2} + a_n = 0$ für $n \geq 0$.

(b) Die eindeutige Lösung mit $y(0) = 0, y'(0) = 1$ ist eine gerade Funktion, dh. $y(-x) = y(x)$.

(c) Die eindeutige Lösung mit $y(0) = 1, y'(0) = 0$ ist $y(x) = e^{-x^2/2}$.

(d) Jede Lösung y erfüllt entweder $y(-x) = y(x)$ oder $y(-x) = -y(x)$.

Siehe nächstes Blatt!

5. (★★⯪) Die folgende Differentialgleichung beschreibt die Funktion $t \to \varphi(t)$ der Winkelverschiebung eines Pendels:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\sin(\varphi) = 0, \tag{1}$$

wobei g die Erdanziehung und ℓ die Länge des Pendels bezeichnen. Approximieren wir $\sin(\varphi)$ durch φ, so erhalten wir die folgende Differentialgleichung:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0 \tag{2}$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) (2) ist die Differentialgleichung einer ungedämpften Schwingung.

(b) Die Lösung von (2) mit den Anfangsbedingungen $\varphi(0) = \varphi_0$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$ ist periodisch und die Periode ist unabhängig von φ_0.

(c) Jede Lösung von (2) ist periodisch und die Periode ist unabhängig von ℓ.

(d) Die Lösungen von (1) und (2) mit den Anfangsbedingungen $\varphi(0) = \varphi_0$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$ gleichen einander mehr wenn $\varphi_0 = \pi/100$ als wenn $\varphi_0 = \pi/2$ ist.

Bitte wenden!

6. (★★½) Lösen Sie die Differentialgleichungssysteme

a) $\begin{cases} \dot{x} &= -x+y \\ \dot{y} &= -x-3y \\ x(0) &= 0 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dot{x} &= -7x+4y \\ \dot{y} &= -9x+5y+e^{-t} \\ x(0) &= 0 \\ y(0) &= 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dot{x} &= 2x-y \\ \dot{y} &= x+2y \end{cases}$

7. (★★) Bestimmen Sie für folgende Differentialgleichungssysteme das Phasenporträt. Erstellen Sie eine Skizze inklusive des Durchlaufsinns der Kurven.

a) $\begin{cases} \dot{x} &= x \\ \dot{y} &= x^2+y \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dot{x} &= 2x \\ \dot{y} &= \frac{x}{y} \end{cases}$

8. (★★★) Finden Sie alle Gleichgewichtspunkte des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t)^2+y(t)^2-1 \\ \dot{y}(t) &= x(t)^2-y(t)^2. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie, welche Gleichgewichtspunkte stabil sind.
Hinweis: Betrachten Sie für die Stabilität das linearisierte System.

9. (★★) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 6. Ordnung der Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(x)+xy'(x)+x^2y=0, \qquad y(0)=0, \quad y'(0)=1.$$

10. (★★½) Finden Sie eine Rekursionsformel für die Taylorkoeffizienten a_n der Lösung $y(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$ des Anfangswertproblems

$$y''(x)+x^3y(x)=x, \qquad y(0)=0, \quad y'(0)=0,$$

und bestimmen Sie $a_0, a_1, \ldots, a_{10}$.