Runge-Kutta Verfahren

Ein s-stufiges Runge-Kutta (Einschritt-) Verfahren (RK-ESV) ist definiert durch

$$y_{j+1} = y_j + h \cdot \sum_{i=1}^{s} b_i \cdot k_i$$

wobei die Stufen/Steigungen

$$k_i = f\left(t_j + c_i \cdot h,\ y_j + h \cdot \sum_{l=1}^{s} a_{il} \cdot k_l\right)$$

sind. Weiter nennt man

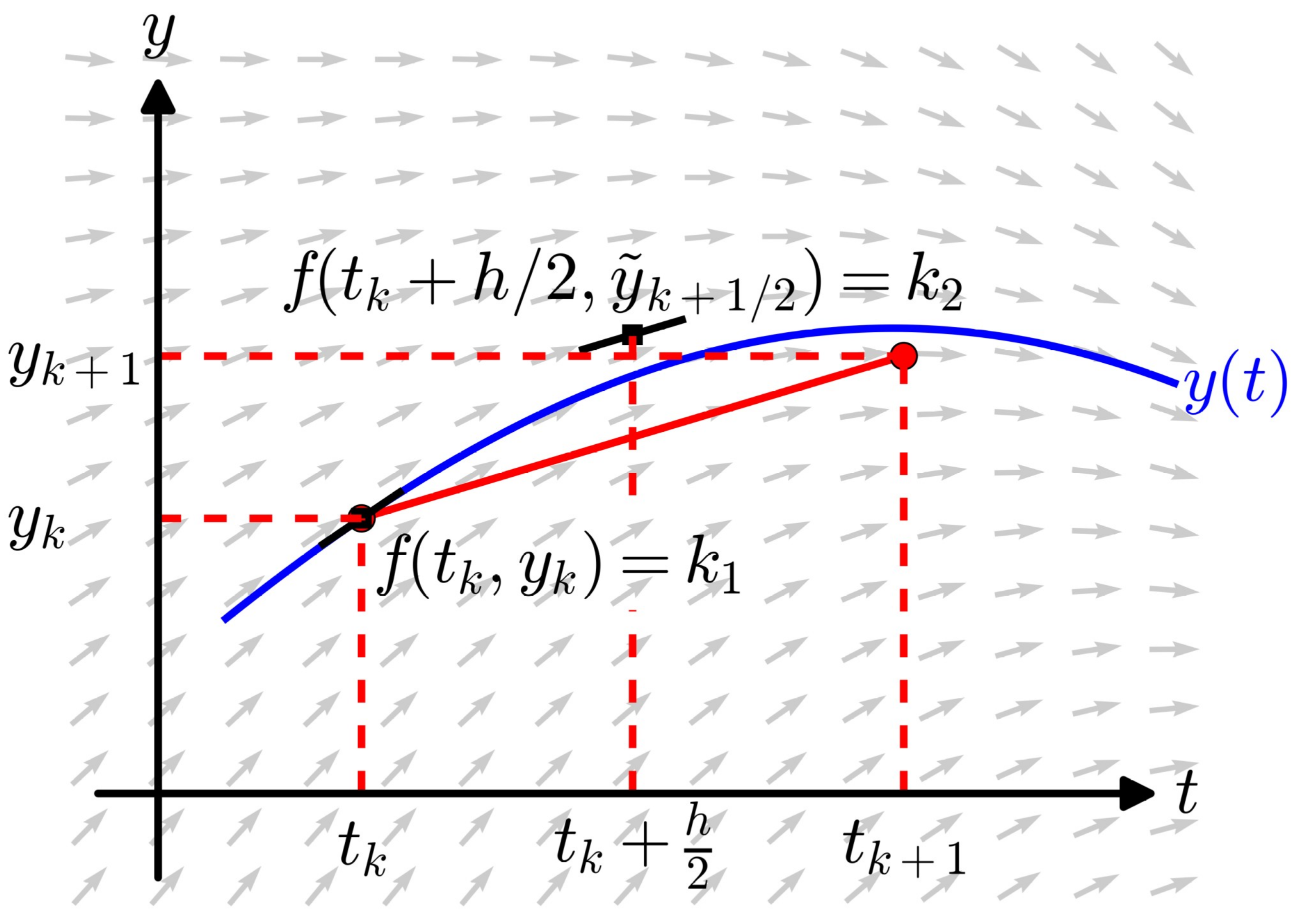
s ... Anzahl Stufen
c_i ... Knoten
b_i ... Gewichte
a_{il} ... Runge-Kutta Matrix/Koeffizienten

RK Verfahren schreibt man am besten in einem sog. Butcher-Tableau (BT)

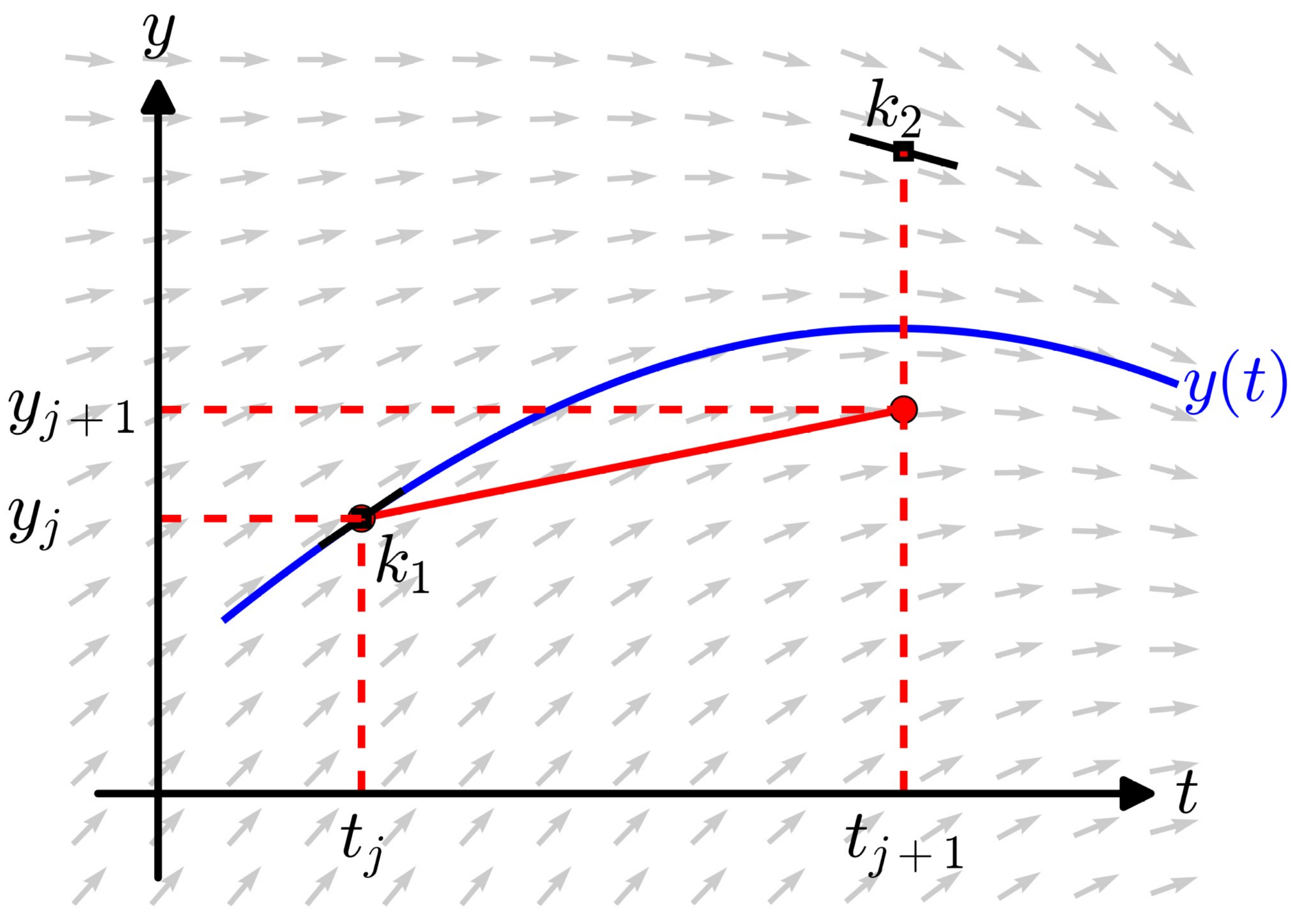
$$
\begin{array}{c|cccc}
c_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\
c_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\
\vdots & & & & \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \cdots & b_s
\end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{c|c}
\vec{c} & A \\
\hline
 & \vec{b}^{T}
\end{array}
$$

transponiert

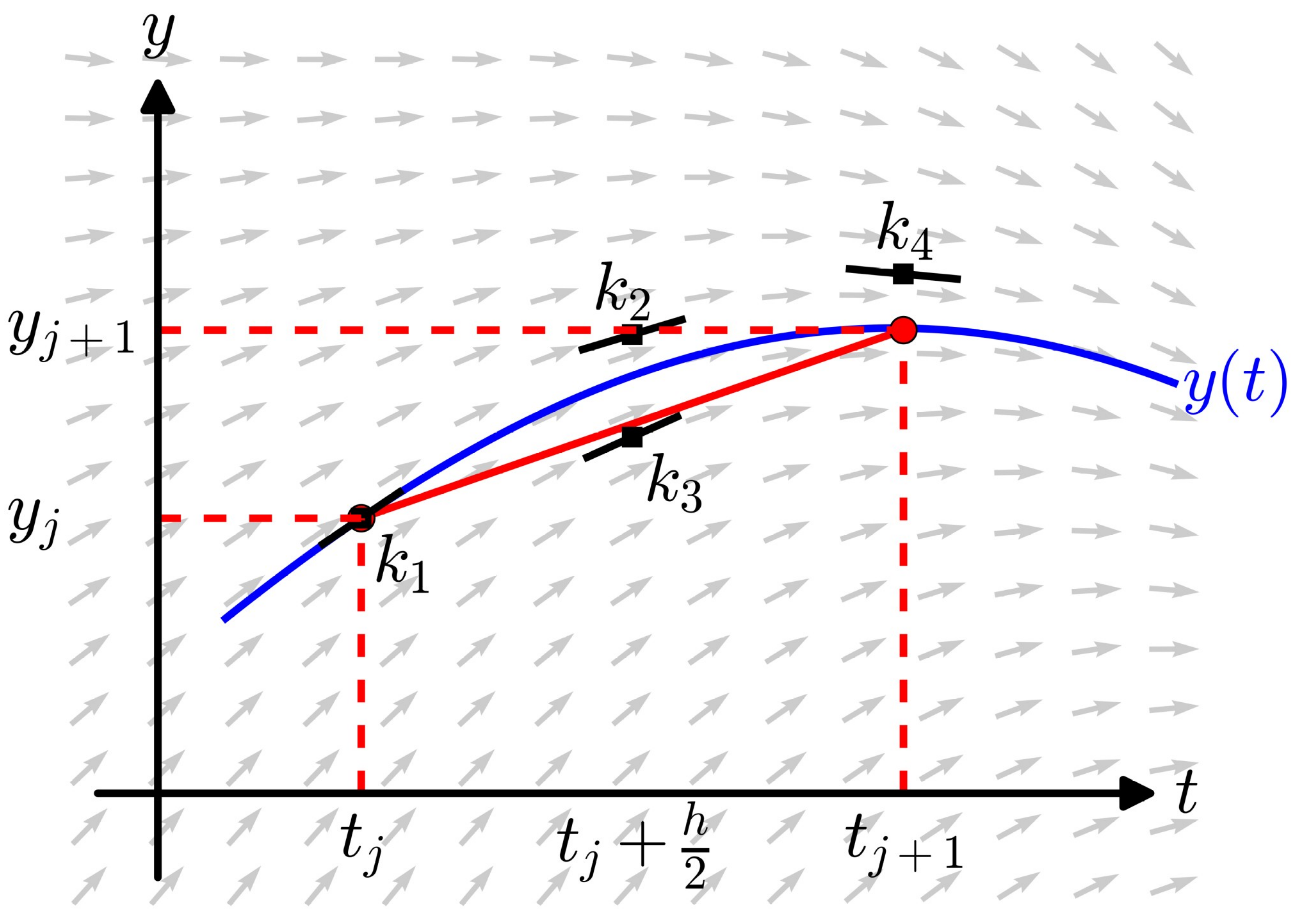
Verbesserter Euler



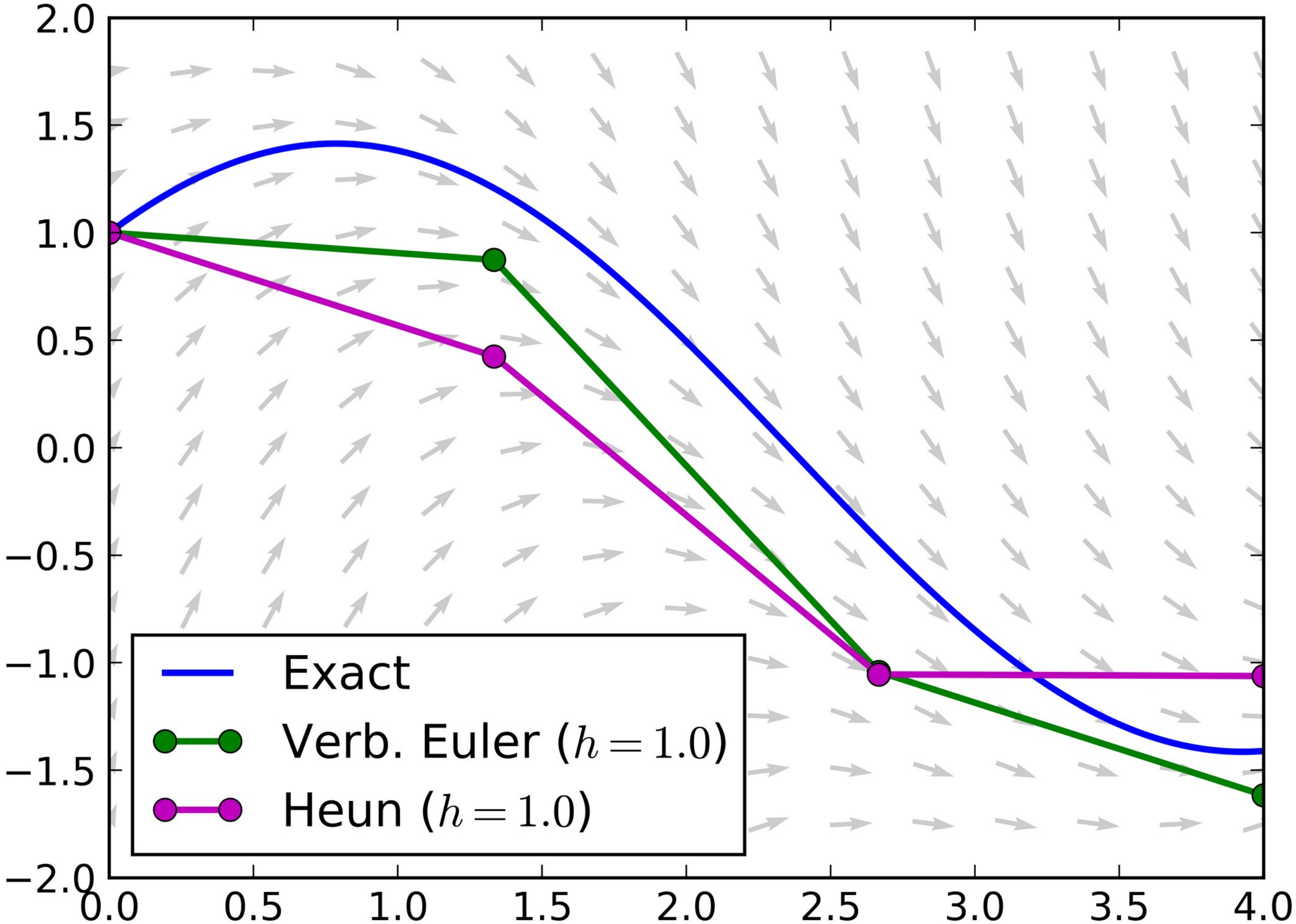
Heun's Methode



DIE Runge-Kutta Methode

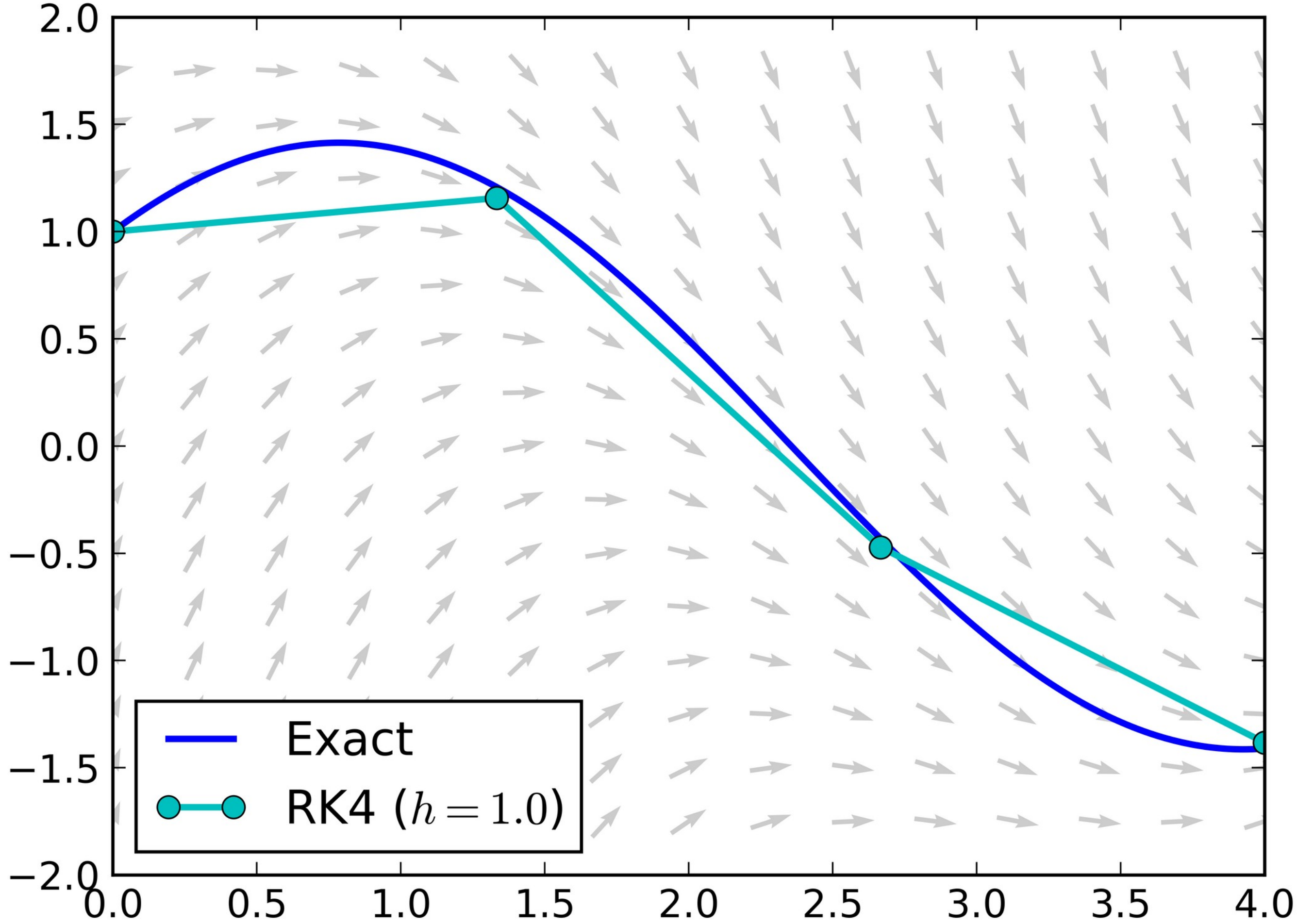


Verb. Euler & Heun



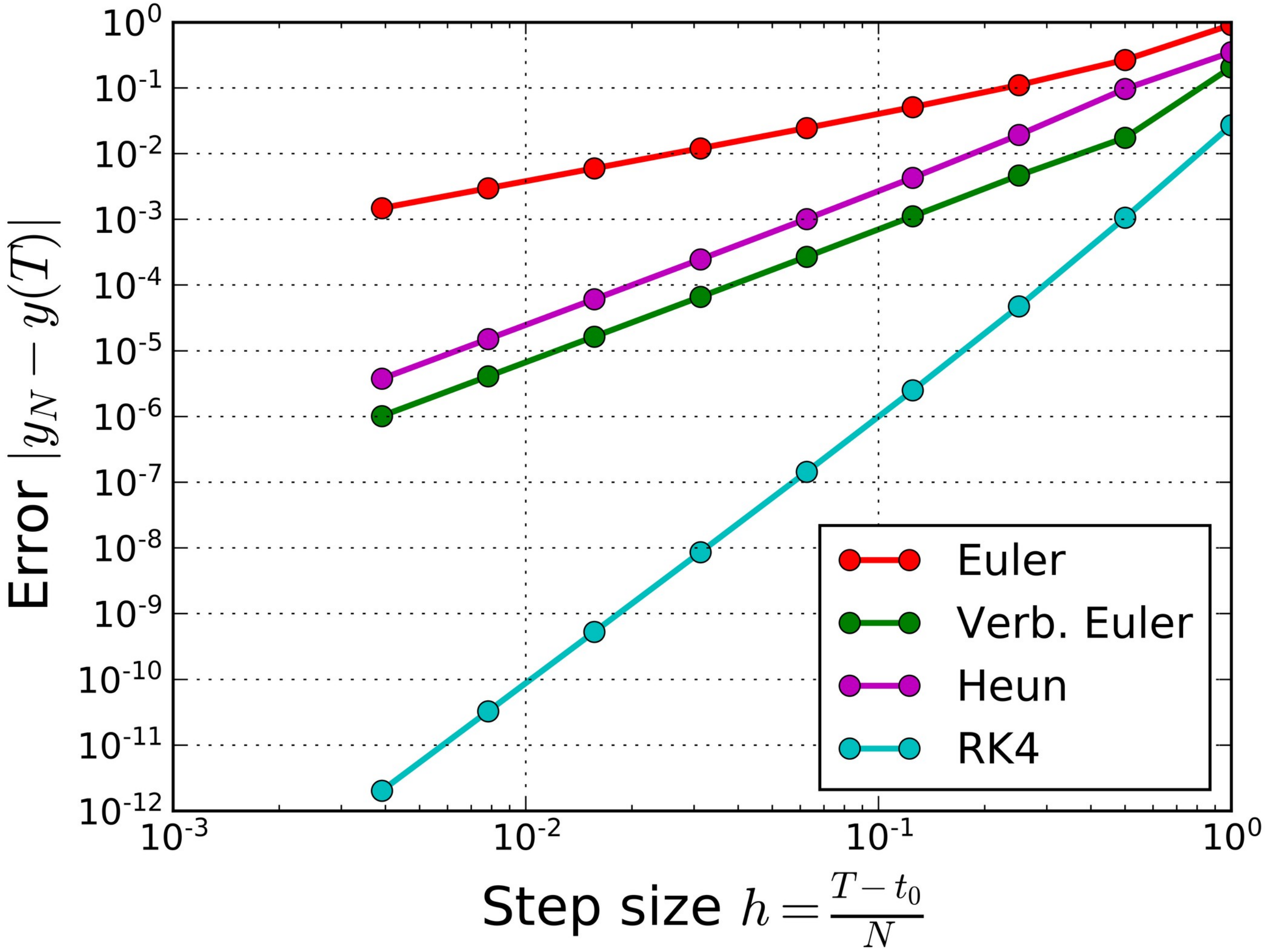
$$\begin{cases} \dot{y}(t) & = -y(t) + 2\cos(t) \\ y(t_0 = 0) & = 1 \end{cases}$$

DIE Runge-Kutta Methode



$$\begin{cases} \dot{y}(t) & = -y(t) + 2\cos(t) \\ y(t_0 = 0) & = 1 \end{cases}$$

Fehler



Error $|y_N - y(T)|$
Step size $h = \frac{T - t_0}{N}$
10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
10^{-7}
10^{-8}
10^{-9}
10^{-10}
10^{-11}
10^{-12}
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
Euler
Verb. Euler
Heun
RK4

(19) Allgemeines 3-stufiges explizites RK

$$
\begin{array}{c|ccc}
c_1 & & & \\
c_2 & a_{21} & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & \\
\hline
 & b_1 & b_2 & b_3
\end{array}
$$

Durch entwickeln der Verfahrensfunktion und Vergleich mit der exakten Entwicklung erhält man folgende Bedingungen:

$$b_1 + b_2 + b_3 = 1$$ 1. Ordnung

$$b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 1/2$$
$$a_{21} b_2 + (a_{31} + a_{32}) b_3 = 1/2$$ 2. Ordnung

$$b_1 c_1^2 + b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 = 1/3$$
$$a_{21} b_2 c_2 + (a_{31} + a_{32}) b_3 c_3 = 1/3$$
$$a_{21}^2 b_2 + (a_{31} + a_{32})^2 b_3 = 1/3$$ 3. Ordnung
$$a_{21} b_2 c_1 + a_{31} b_3 c_1 + a_{32} b_3 c_2 = 1/6$$
$$a_{21} a_{32} b_3 = 1/6$$

Satz II.3: Falls die rechte Seite der DGL $\vec{f}(t,\vec{y})$ und die Verfahrens-Funktion $\vec{\phi}(t,\vec{y},t)$ Lipschitz-stetig in $\vec{y}$ sind, dann gilt für das ESV folgende (globale) Fehlerabschätzung

$$\epsilon = \max_{j=0,\dots,N} \|\vec{y}(t_j) - \vec{y}_j\| \leq \Big(\underbrace{\|\vec{y}(t_0) - \vec{y}_0\|}_{\text{AW Fehler}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{N} \|\vec{e}_j\|}_{\text{Fehler in jedem Schritt summieren sich schlimmstenfalls}} \Big) \cdot e^{\tilde{L}(t_N - t_0)}$$

wobei $\tilde{L}$ die Lipschitz-Konstante der Verfahrens-Funktion $\vec{\phi}$ ist.