

## Lösung 1

1. Siehe `conwayGameOfLife.m`.

2. a) Die Lagrange Polynome sind gegeben durch

$$L_j^n(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i}.$$

Das gilt

$$L_0^2(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq 0}}^2 \frac{x - x_i}{x_0 - x_i} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(2x - a - b)(x - b)}{(a - b)^2},$$

$$L_1^2(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq 1}}^2 \frac{x - x_i}{x_1 - x_i} = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = 4 \frac{(x - a)(x - b)}{(b - a)(a - b)},$$

$$L_2^2(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq 2}}^2 \frac{x - x_i}{x_2 - x_i} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(2x - a - b)(x - a)}{(a - b)^2}.$$

b) Die Gewichte sind definiert durch

$$\omega_j = \int_a^b L_j^n(x) dx.$$

Das gilt

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \int_a^b L_0^2(x) dx = \frac{1}{(a - b)^2} \int_a^b (2x - a - b)(x - b) dx \\ &= \frac{1}{(b - a)^2} \left( b(a + b)x - \frac{a + 3b}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 \Big|_{x=a}^b \right) = \frac{b - a}{6}, \end{aligned}$$

$$\omega_1 = \int_a^b L_1^2(x) dx = \frac{4}{(b - a)(a - b)} \int_a^b (x - a)(x - b) dx$$

**Bitte wenden!**

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{(b-a)(a-b)} \left( abx - \frac{a+b}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \Big|_{x=a}^b \right) = 4 \frac{b-a}{6}, \\
\omega_2 &= \int_a^b L_2^2(x) dx = \frac{1}{(a-b)^2} \int_a^b (2x-a-b)(x-a) dx \\
&= \frac{1}{(b-a)^2} \left( a(a+b)x - \frac{b+3a}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 \Big|_{x=a}^b \right) = \frac{b-a}{6}.
\end{aligned}$$

c) Wir haben

$$\begin{aligned}
S[1] &= \sum_{j=0}^2 \omega_j 1 = \frac{2}{6} (1 + 4 + 1) = 2 = I[1], \\
S[x] &= \sum_{j=0}^2 \omega_j x_j = \frac{2}{6} (-1 + 4 \cdot 0 + 1) = 0 = I[x], \\
S[x^2] &= \sum_{j=0}^2 \omega_j x_j^2 = \frac{2}{6} (1 + 4 \cdot 0 + 1) = \frac{2}{3} = I[x^2], \\
S[x^3] &= \sum_{j=0}^2 \omega_j x_j^3 = \frac{2}{6} (-1 + 4 \cdot 0 + 1) = 0 = I[x^3], \\
S[x^4] &= \sum_{j=0}^2 \omega_j x_j^4 = \frac{2}{6} (1 + 4 \cdot 0 + 1) = \frac{2}{3} \neq \frac{2}{5} = I[x^4].
\end{aligned}$$

Man sieht, dass die Simpson-Regel Polynome bis Grad 3 exakt integrieren kann, d.h. ein Grad mehr als man vom zugrundelegenden quadratischen Interpolationspolynom erwarten würde.

3. Für den Code, siehe `runge_equi.m` und `runge_cheby.m`. Wenn nur 6 Stützstellen verwendet werden, sieht man in Abbildung 1 keinen grossen Unterschied. Die Approximation mit äquidistanten Stützstellen wird jedoch sehr schlecht, wenn die Anzahl von Punkten erhöht wird. Im Gegenteil, wird die Approximation mit intelligent verteilte Stützstellen besser.

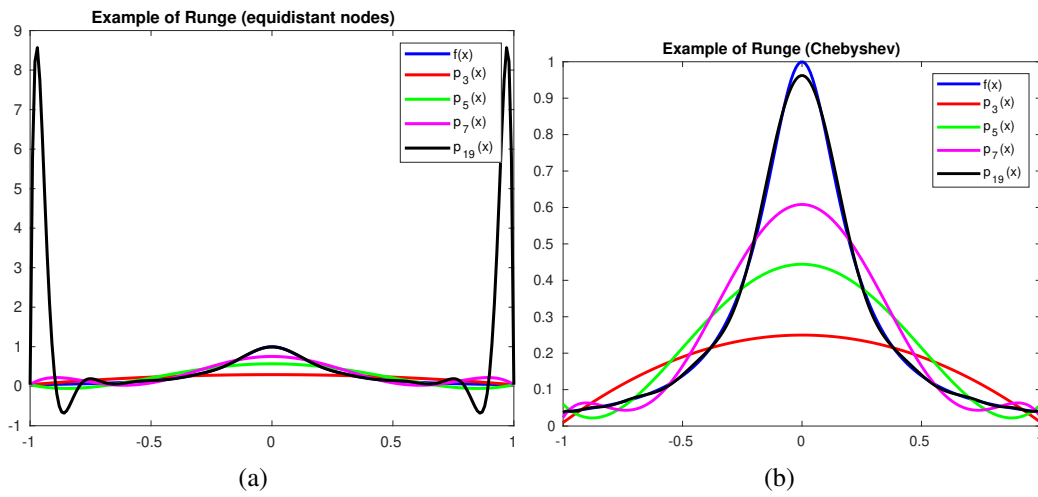


Abbildung 1 – Approximation mit (a) äquidistanten Stützstellen und mit (b) intelligent verteilte Stützstellen.