

Lösung 5

1. a) In der Vorlesung haben wir den folgenden Trick gesehen

$$E^1[f] = |Q_1[f] - Q_1^2[f] + Q_1^2[f] - I[f]| \leq |Q_1^2[f] - Q_1[f]| + |Q_1^2[f] - I[f]|.$$

Mit $E^2[f] = |Q_1^2[f] - I[f]| \approx \frac{E^1[f]}{2^s}$, erhalten wir

$$E^1[f] \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \approx |Q_1[f] - Q_1^2[f]| \Leftrightarrow E^1[f] \approx \left(\frac{2^s}{2^s - 1}\right) |Q_1[f] - Q_1^2[f]|.$$

Dann haben wir für $E^2[f]$

$$E^2[f] \approx \frac{E^1[f]}{2^s} \approx \left(\frac{1}{2^s - 1}\right) |Q_1[f] - Q_1^2[f]|.$$

Da die Trapezregel die Ordnung $s = 2$ besitzt, ist der Fehler-Schätzer für $E^2[f]$ gegeben durch

$$E^2[f] \approx \frac{|Q_1[f] - Q_1^2[f]|}{3}.$$

- b) Siehe `adapttrapez_simple.m`.
- c) Die Implementierung `adapttrapez_simple.m` besitzt folgende zwei Haupt-Schwächen:
- Die Rekursion könnte unendlich lang weiter gehen
 - Die Funktionsauswertungen werden immer von neuem berechnet

2. Explizites Eulerverfahren

- a) Man erhält das Richtungsfeld in Abb. 1.
- b) Siehe das kommentierte `expEuler.m`.
- c) Die beiden numerisch berechneten Lösungen sind in Abb. 1 dargestellt.

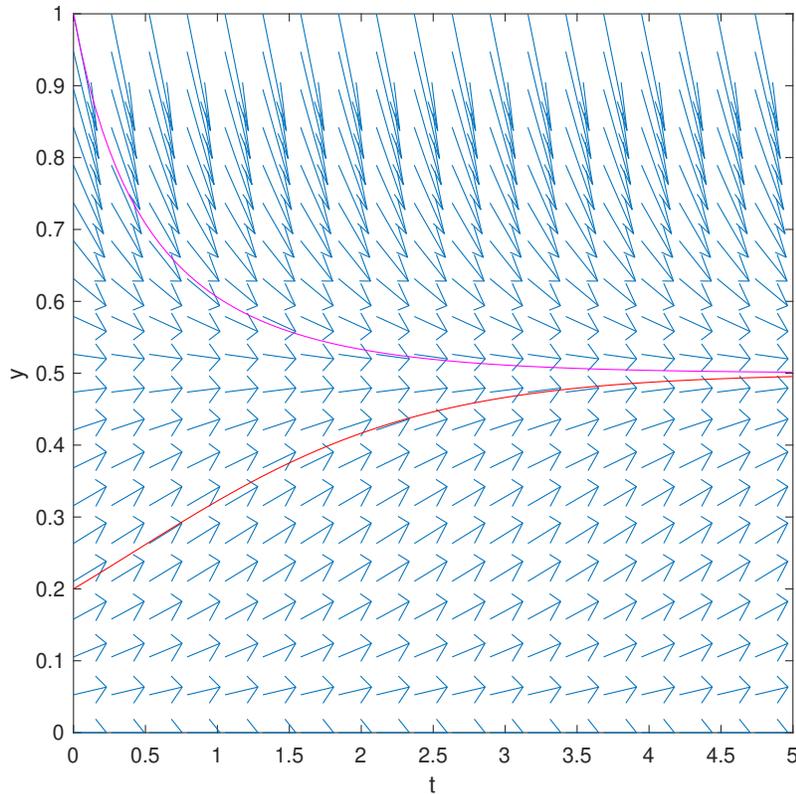


Abbildung 1 – Richtungsfeld der logistischen Diff.-Gl. und zwei mit dem Euler Verfahren numerisch berechneten Lösungen.

- d)** Wir beobachten, dass in dem $\log\text{-}\log\text{-Plot}$ ($\log(h)$ vs. $\log(\text{Abs. Fehler})$) der absolute Fehler auf einer Geraden liegen (für $h \lesssim 0.1$). Dank dem Gitter erkennt man auch leicht, dass die Gerade ungefähr Steigung Eins hat. Also der absolute Fehler verhält sich wie $E_N = O(h^p)$ mit $p = 1$. Das explizite Euler Verfahren hat somit Ordnung Eins!

3. Die exakte Lösung des AWP's ist gegeben durch $\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{y}_0$.

Behauptung: $\mathbf{y}_k(t) = \left(\sum_{j=0}^k \frac{(\mathbf{A}t)^j}{j!} \right) \mathbf{y}_0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Beweis durch vollständige Induktion: Für $k = 1$ haben wir

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1(t) &= \mathbf{y}_0 + \int_0^t \mathbf{A} \mathbf{y}_0 dt \\ &= (\mathbf{I} + \mathbf{A}t) \mathbf{y}_0 \\ &= \left(\sum_{j=0}^1 \frac{(\mathbf{A}t)^j}{j!} \right) \mathbf{y}_0. \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

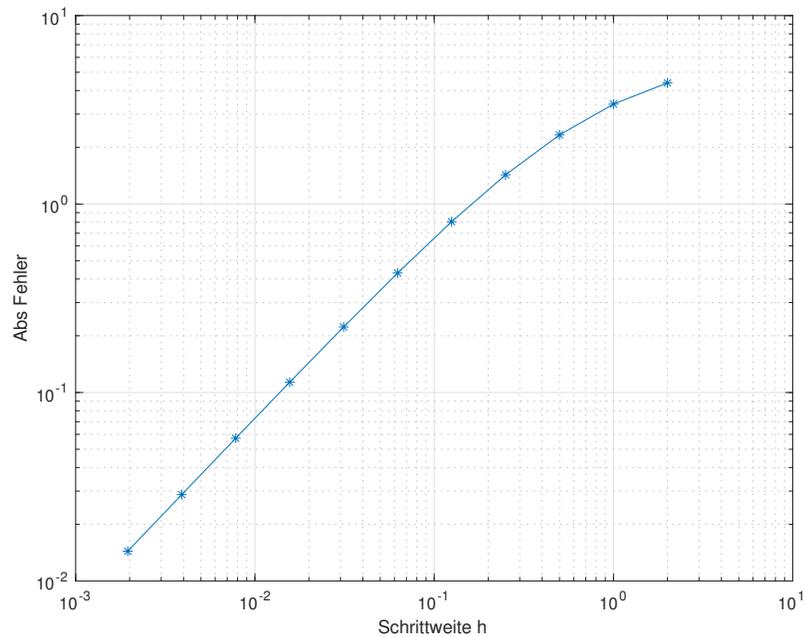


Abbildung 2 – loglog-Plot des absoluten Fehlers als Funktion der Schrittweite.

Für $k = 2$ haben wir

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}_2(t) &= \mathbf{y}_0 + \int_0^t \mathbf{A} \mathbf{y}_1(s) dt \\
 &= \mathbf{y}_0 + \int_0^t \mathbf{A} (\mathbf{I} + \mathbf{A}s) \mathbf{y}_0 dt \\
 &= \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{(\mathbf{A}t)^2}{2} \right) \mathbf{y}_0 \\
 &= \left(\sum_{j=0}^2 \frac{(\mathbf{A}t)^j}{j!} \right) \mathbf{y}_0.
 \end{aligned}$$

Gehen wir davon aus, dass die Aussage für k bereits bewiesen ist. Dann für $k + 1$

Bitte wenden!

erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{k+1}(t) &= \mathbf{y}_0 + \int_0^t \mathbf{A} \mathbf{y}_k(s) ds \\ &= \mathbf{y}_0 + \left(\sum_{j=0}^k \frac{\mathbf{A}^{j+1}}{j!} \int_0^t s^j ds \right) \mathbf{y}_0 \\ &= \mathbf{y}_0 + \left(\sum_{j=0}^k \frac{(\mathbf{A}t)^{j+1}}{(j+1)!} \right) \mathbf{y}_0 \\ &= \left(\sum_{j=0}^{k+1} \frac{(\mathbf{A}t)^j}{j!} \right) \mathbf{y}_0. \end{aligned}$$

Da $e^{\mathbf{A}t} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^j}{j!}$, erhalten wir dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{y}_{k+1}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(t).$$

4. a) Wir setzen

$$\mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} z_0(t) \\ z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \dddot{y}(t) \end{pmatrix},$$

und erhalten

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ \cos(z_2(t)) + z_1(t)e^{-5t} \end{pmatrix},$$

mit Anfangswert

$$\mathbf{z}(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Wir schreiben

$$\mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix},$$

und erhalten

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{pmatrix} -z_1(t) + \cos(z_2(t))e^{-z_2(t)} \\ 1 \end{pmatrix},$$

mit Anfangswert

$$\mathbf{z}(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Siehe nächstes Blatt!

c) Wir schreiben

$$\tilde{\mathbf{z}}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{z}(t) \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{z}}_1(t) \\ \tilde{z}_2(t) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{z}}_1(t) := \begin{pmatrix} \tilde{z}_{1,0}(t) \\ \tilde{z}_{1,1}(t) \\ \tilde{z}_{1,2}(t) \\ \tilde{z}_{1,3}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0(t) \\ z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix},$$

und erhalten

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{z}}}_1(t) \\ \dot{\tilde{z}}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{z}_{1,1}(t) \\ \tilde{z}_{1,2}(t) \\ \tilde{z}_{1,3}(t) \\ \cos(\tilde{z}_{1,2}(t)) + \tilde{z}_{1,1}(t)e^{-5\tilde{z}_2(t)} \\ 1 \end{pmatrix},$$

mit Anfangswert

$$\tilde{\mathbf{z}}(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \\ t_0 \end{pmatrix}.$$