

## Lösung 6

1. a) Wir erhalten die folgende Ergebnisse:

- $f(x) = x^2$  ist stetig differenzierbar mit beschränkter Ableitung auf  $[-1, 1] \Rightarrow$  Lipschitz stetig
- $f(x) = |x|$ : Es gilt

$$|f(x) - f(y)| = ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

nach der umgekehrten Dreiecksungleichung  $\Rightarrow f$  L-stetig mit  $L = 1$

- $f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0, \\ -1 & x \geq 0, \end{cases}$  ist nicht stetig  $\Rightarrow f$  ist nicht Lipschitz stetig, da Lipschitz-stetige Funktionen stetig sind.
- $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$  ist stetig; für  $x = 0$  gilt allerdings

$$\frac{f(0) - f(y)}{0 - y} = \frac{\sqrt[3]{y^2}}{y} = \frac{1}{y^{1/3}} \rightarrow \infty \quad (y \rightarrow 0),$$

d.h. der Differenzenquotient in  $x = 0$  ist nicht beschränkt. Demnach ist  $f$  nicht Lipschitz-stetig auf  $[-1, 1]$ .

b) Wir müssen die Voraussetzungen des Picard-Lindelöf Satzes überprüfen, d.h. die rechte Seite  $f$  soll stetig in  $(t, y)$  und Lipschitz-stetig in  $y$  auf  $[t_0, t_0 + \delta_1] \times (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$  sein, wobei  $\delta_1, \delta_2 > 0$ . Alle untersuchten Probleme haben rechte Seiten  $f$ , die stetig sind in  $(t, y)$ . Wir werden uns deshalb im folgenden auf die Untersuchung der Lipschitz-Stetigkeit in Umg. der Anfangswerte beschränken.

- $\dot{y}(t) = y(t)^2, \quad y(0) = 0.5$ : ✓  
Die Funktion  $f(t, y) = y^2$  ist stetig differenzierbar mit beschränkter Ableitung auf  $[0.5 - \delta, 0.5 + \delta]$  für jedes  $\delta > 0$ ; deswegen ist sie Lipschitz-stetig in Umgebung vom Anfangswert  $y_0 := 0.5$ .
- $\dot{y}(t) = |y(t)|, \quad y(0) = 0$ : ✓  
Wir wollen zeigen, dass die Funktion  $f(t, y) = |y|$  Lipschitz-stetig in Umgebung vom Anfangswert  $y_0 := 0$  ist. Für  $x, y \in \mathbb{R}$  haben wir

$$\begin{aligned} |x| &= |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x - y|, \\ |y| &= |y - x + x| \leq |x - y| + |x| \Rightarrow -|x - y| \leq |x| - |y|, \end{aligned}$$

und so erhalten wir  $||x| - |y|| \leq |x - y|$ . Es folgt dann, dass  $f$  Lipschitz-stetig auf  $\mathbb{R}$  ist.

**Bitte wenden!**

- $\dot{y}(t) = \sqrt[3]{y(t)^2}$ ,  $y(0) = 0.5$ : ✓  
Für  $y > 0$  ist die Ableitung von  $f(t, y) = \sqrt[3]{y^2}$  bezüglich  $y$  definiert durch  $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = \frac{2}{3}y^{-1/3}$ . Die Ableitung ist dann für jede  $\varepsilon > 0$  auf  $[\varepsilon, \infty)$  beschränkt und deshalb in Umgebung von  $y_0 := 0.5$  beschränkt. Es folgt dann, dass  $f$  in Umgebung von  $y_0$  Lipschitz-stetig ist.
- $\dot{y}(t) = \sqrt[3]{y(t)^2}$ ,  $y(0) = 0$ : ✗  
Wir zeigen, dass die Funktion  $f(t, y) = \sqrt[3]{y^2}$  in Umgebung von  $y_0 := 0$  nicht Lipschitz-stetig ist. Wir haben für  $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\frac{f(y) - f(0)}{y - 0} = \frac{f(y)}{y} = y^{-1/3},$$

was für  $y \rightarrow 0$  nicht beschränkt ist. Deshalb kann  $f$  nicht Lipschitz-stetig sein.

- $\dot{y}(t) = \sqrt[3]{y(t)^2}$ ,  $y(t_0) = 0$ ,  $t_0 = 1$ : ✗  
The function  $f(t, y) = \sqrt[3]{y^2}$  is not Lipschitz continuous at  $y_0 := 0$ , as discussed in the previous problem.

2. a) Sei  $I := \dot{Q}$ . Das äquivalente System von Differentialgleichungen erster Ordnung lautet

$$\begin{pmatrix} \dot{Q} \\ \dot{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ (E - Q/C - RI)/L \end{pmatrix}.$$

mit Anfangswerten

$$Q(t_0) = Q_0, \quad I(t_0) = I_0.$$

- b) Siehe `expEulerRLC.m`. For the given settings, we observe that with time step size  $\Delta t = 10^{-2}$  the explicit Euler method is unstable, because  $\Delta t$  has the same order of magnitude as of the time period of the forcing function  $E$  is  $2\pi/100 \approx 0.06$ . Therefore, when we decrease the time step size to  $10^{-3}$ , the method becomes stable. For  $\Delta t = 10^{-4}$  and even smaller time step sizes, the approximation accuracy increases.

### 3. Trajektorie bei Streuung

- a) Schreiben wir die gew. Diff.-Gl. für den Position Vektor einzeln für die  $x$  und  $y$  Koordinate

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) &= F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \\ m\ddot{y}(t) &= F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \end{aligned} \tag{1}$$

**Siehe nächstes Blatt!**

wobei auf der rechten Seite die jeweilige Kraftkomponente steht welche sich aus dem Gradienten des Lennard-Jones Potentials ergeben. Letztere ergeben sich aus einfacher Anwendung elementarer Ableitungsregeln zu

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} = -4 \left( \frac{6}{r^8} - \frac{12}{r^{14}} \right) x \\ F_y &= -\frac{\partial U}{\partial y} = -4 \left( \frac{6}{r^8} - \frac{12}{r^{14}} \right) y, \end{aligned} \quad (2)$$

wobei  $r^2 = x^2 + y^2$ .

Nun müssen wir nur noch die beiden gew. Diff.-Gl zweiter Ordnung in Gl. (1) in jeweils 2 gew. Diff.-Gl. erster Ordnung umschreiben. Schreiben wir zuerst die Diff.-Gl. für die  $x$  Koordinates des Teilchens um. Hierzu führen wir die folgende neuen Variablen ein

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x(t) \\ x_1(t) &= \dot{x}(t) = \dot{x}_0(t) \\ x_2(t) &= \ddot{x}(t) = \frac{F_x}{m} = \dot{x}_1(t). \end{aligned} \quad (3)$$

Hier haben wir die durch die Masse  $m$  dividierte Gl. (1) verwendet. Aus Gl. (3) ergibt sich nun folgendes System zweier gew. Diff.-Gl. erster Ordnung:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0(t) &= x_1(t) \\ \dot{x}_1(t) &= \frac{F_x}{m}. \end{aligned} \quad (4)$$

Genau gleich formt man die Diff.-Gl. für die  $y$  Koordinates des Teilchens um zu:

$$\begin{aligned} \dot{y}_0(t) &= y_1(t) \\ \dot{y}_1(t) &= \frac{F_y}{m}. \end{aligned} \quad (5)$$

Die Gl. (4) und (5) können wir zusammenführen als

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{z}(t)) \quad (6)$$

wobei wir den Vektor

$$\mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ y_0(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} \quad (7)$$

eingeführt haben. Die rechte Seite ist dann gegeben durch

$$\mathbf{g}(t, \mathbf{z}(t)) = \begin{pmatrix} z_2 \\ F_x/m \\ z_4 \\ F_y/m \end{pmatrix} \quad (8)$$

**Bitte wenden!**

wobei man natürlich noch die Kraft in der  $z$  Variablen schreibt

$$\begin{aligned} F_x &= -4 \left( \frac{6}{r^8} - \frac{12}{r^{14}} \right) z_1(t) \\ F_y &= -4 \left( \frac{6}{r^8} - \frac{12}{r^{14}} \right) z_3(t) \end{aligned} \quad (9)$$

mit  $r^2 = z_1(t)^2 + z_3(t)^2$ .

b) Die Implementierung finden Sie in den kommentierten `streuung.m` und `fstreuung.m`.

4. a) Die verbesserte Polygonzugmethode von Euler ist im Richtungsfeld in Abb. 1 skizziert.

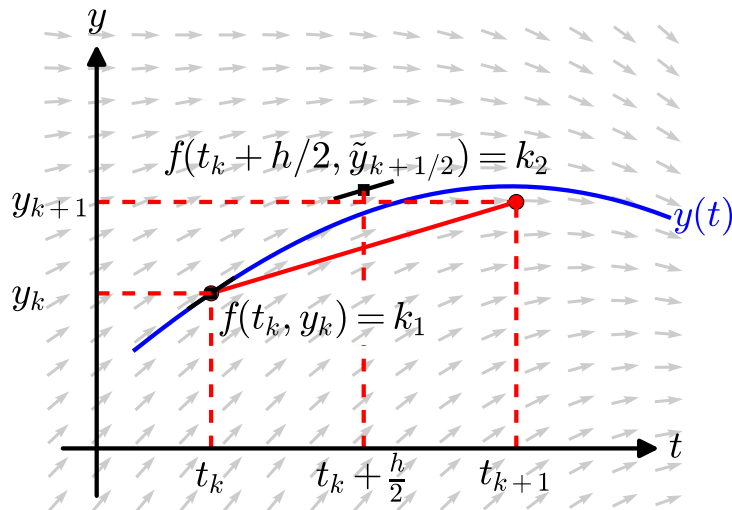


Abbildung 1 – Skizze der verbesserten Polygonzugmethode von Euler.

b) Siehe im kommentierten `verbEuler.m`.

c) Der absolute Fehler als Funktion der Schrittweite ist in Abb. 2 dargestellt. Man erkennt gut: wenn man die Schrittweite um einen Faktor 10 verkleinert, so verkleinert sich der Fehler um einen Faktor  $\sim 100$ .

Wir beobachten eine empirische Konvergenzordnung von 1.98 und 1.97. Siehe im kommentierten `konvOrdnungEmpirisch.m`.

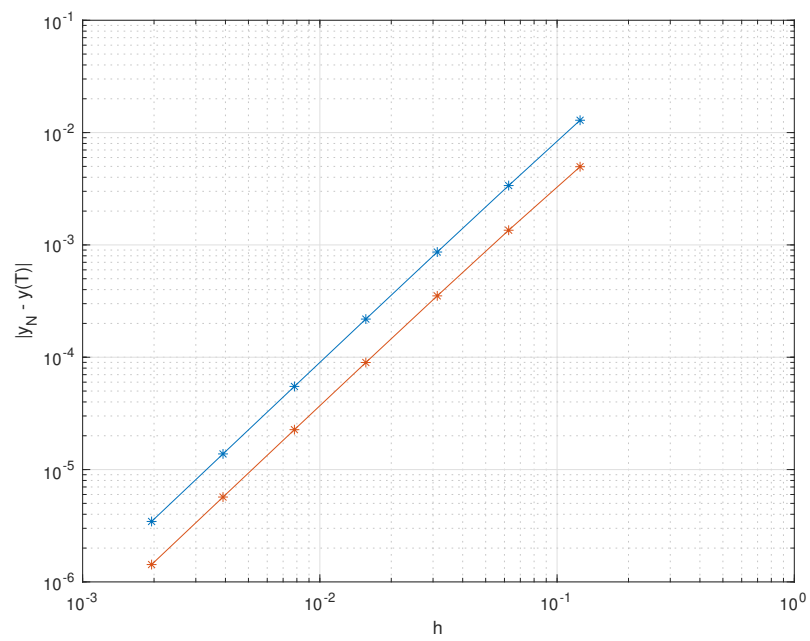


Abbildung 2 – Absolute Fehler als Funktion der Schrittweite für AWP 1 (blau) und AWP 2 (rot).