

Lösung 7

1. a) Für $y(t)$ definiert durch $y(t) = \frac{t^2}{1+t^2}$ haben wir

$$\frac{dy}{dt}(t) = \frac{2t(1+t^2) - t^2 \cdot 2t}{(1+t^2)^2} = \frac{2t}{(1+t^2)^2}.$$

Da $y(t) - \frac{t^2}{1+t^2} = 0$, ist $y(t)$ die Lösung von dem AWP.

- b) Für $\epsilon > 0$ ist die exakte Lösung des leicht gestörten AWP

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \lambda \left(y(t) - \frac{t^2}{1+t^2} \right) + \frac{2t}{(1+t^2)^2}, \\ y(t_0) &= \epsilon + \frac{t_0^2}{1+t_0^2}, \end{aligned}$$

gegeben durch

$$y(t) = \epsilon e^{\lambda(t-t_0)} + \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Für $\epsilon \neq 0$ und $\lambda > 0$ dominiert der exponential Term also die Lösung für späte Zeiten.

Die approximativen und die exakte Lösungen sind in Abb. 1 dargestellt. Wir beobachten, dass die genäherten Lösungen für $10^{-4} \lesssim h$ sich schnell von der exakten Lösung entfernen. Dieses Verhalten können wir uns dadurch erklären, dass der gemachte Fehler beim ersten Zeitschritt dann zum gestörten AWP von oben führt. Also macht sich der exponential Anteil unausweichlich bemerkbar. Für kleinere Schrittweiten wird dieser Fehler kleiner, also ein kleineres ϵ im gestörten AWP, und deshalb macht sich der exponential Anteil erst später bemerkbar.

- c) Die approximativen und die exakte Lösungen sind in Abb. 2 dargestellt. Hier beobachten wir von Auge keine Unterschiede. Der Grund dafür ist das für negatives λ das gestörte AWP exponentiell schnell gegen das ungestörte AWP zerfällt.

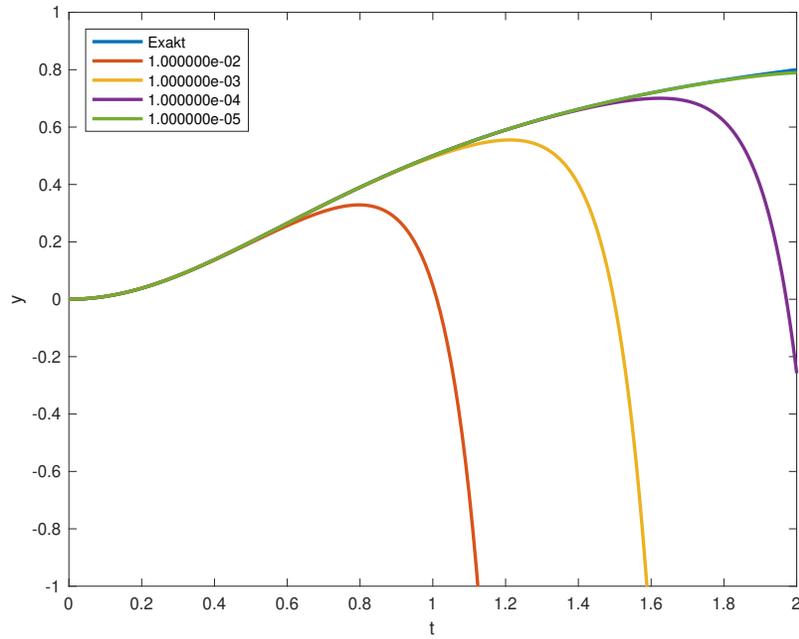


Abbildung 1 – .

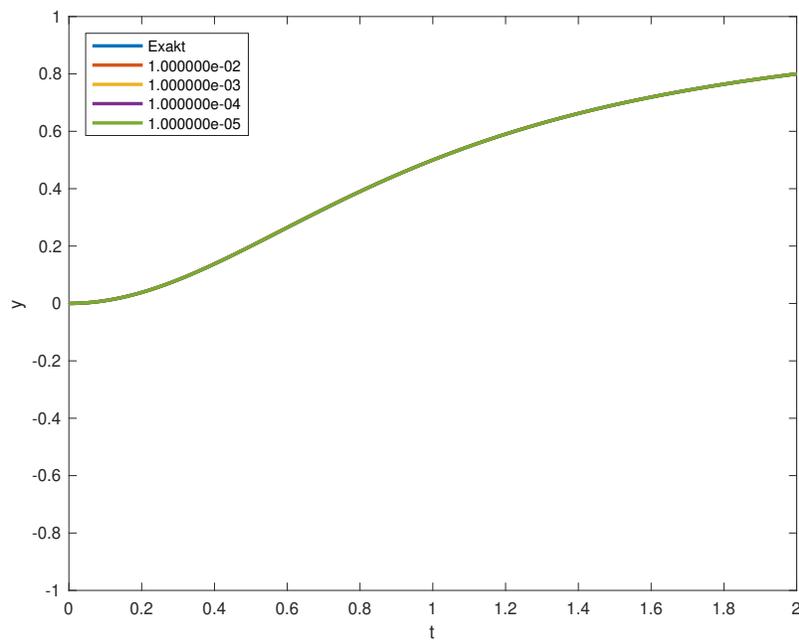


Abbildung 2 – .

2. a) Wir haben

$$I[1] = \int_0^1 1 dx = 1,$$

$$I[x] = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2},$$

$$I[x^2] = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3},$$

Siehe nächstes Blatt!

und für die Quadraturformel $Q[g]$

$$Q[1] = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1 \Rightarrow \checkmark$$

$$Q[x] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \checkmark$$

$$Q[x^2] = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{4} \right)^2 + \left(\frac{3}{4} \right)^2 \right) = \frac{5}{16} \Rightarrow \times$$

Aufgrund der Linearität der Regel folgt dann aus der Exaktheit für die Monome 1 und x , dass die Regel auch exakt ist für allgemeine lineare Polynome $\alpha_0 + \alpha_1 x$.

- b) Wir betrachten das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$. Durch Integration erhalten wir

$$y(t_1) = y_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(s, y(s)) ds.$$

Wir wenden dann unsere Quadraturformel auf das Integral für $t_1 = t_0 + h$ an und erhalten

$$\int_{t_0}^{t_1} f(s, y(s)) ds \approx \frac{h}{2} \left(f \left(t_0 + \frac{h}{4}, y \left(t_0 + \frac{h}{4} \right) \right) + f \left(t_0 + \frac{3h}{4}, y \left(t_0 + \frac{3h}{4} \right) \right) \right).$$

Wir approximieren $y \left(t_0 + \frac{h}{4} \right)$ und $y \left(t_0 + \frac{3h}{4} \right)$ mithilfe des expliziten Eulerverfahrens

$$\begin{aligned} y \left(t_0 + \frac{h}{4} \right) &\approx y_0 + \frac{h}{4} f(t_0, y_0), \\ y \left(t_0 + \frac{3h}{4} \right) &\approx y_0 + \frac{3h}{4} f(t_0, y_0), \end{aligned}$$

und erhalten

$$\begin{cases} k_1 := f(t_0, y_0), \\ k_2 := f \left(t_0 + \frac{h}{4}, y_0 + \frac{h}{4} k_1 \right), \\ k_3 := f \left(t_0 + \frac{3h}{4}, y_0 + \frac{3h}{4} k_1 \right), \\ y_1 := y_0 + \frac{h}{2} (k_2 + k_3). \end{cases}$$

- c) Siehe `quadraturRK.m` und `konvergenzRK.m`. Wir beobachten eine Konvergenzordnung von $1.99 \approx 2$.

3. Butcher-Tableaux

Bitte wenden!

- a) Das Verfahren ist explizit und hat folgendes Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6} \end{array}$$

Im Richtungsfeld sieht es wie oben links in Abb. 3 skizziert aus.

- b) Das Verfahren ist explizit und hat folgendes Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}$$

Im Richtungsfeld sieht es wie oben rechts in Abb. 3 skizziert aus.

- c) Das Verfahren ist explizit und hat folgendes Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{array}$$

Im Richtungsfeld sieht es wie unten links in Abb. 3 skizziert aus.

- d) Das Verfahren ist implizit und hat folgendes Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$$

Im Richtungsfeld sieht es wie unten rechts in Abb. 3 skizziert aus. In der Literatur ist es bekannt als das *implizite Mittelpunkts-Verfahren*.

4. a) Ein Schritt des Verfahrens ist gegeben durch

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_k, y_k), \\ k_2 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f(t_k + h, y_k + hk_3), \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

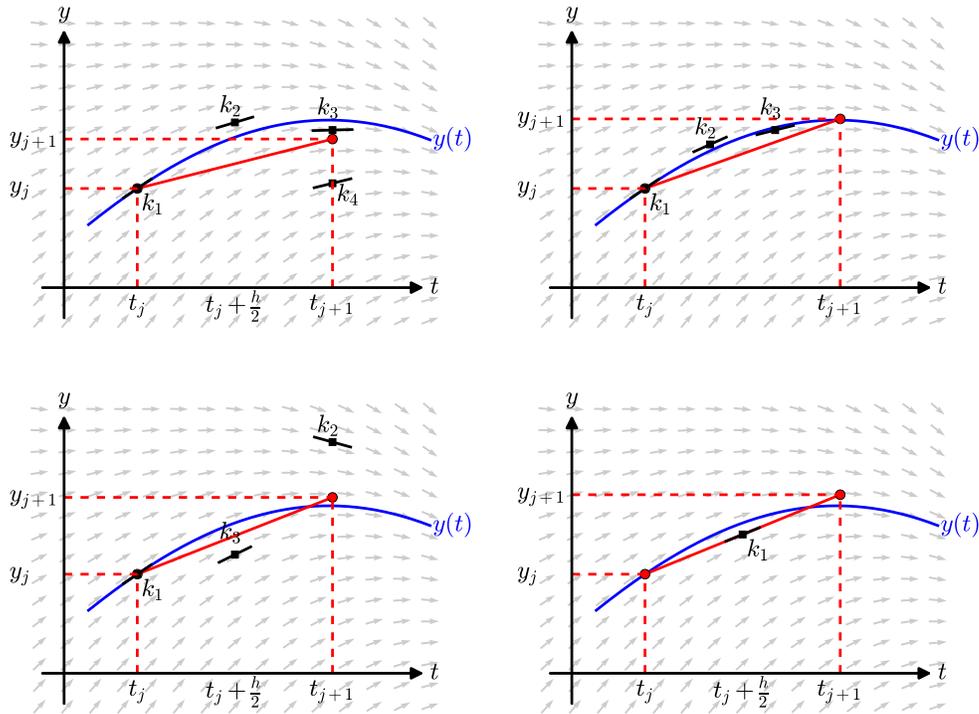


Abbildung 3 – Skizze der Verfahren im Richtungsfeld.

b) Siehe klassische RK.m.

c) Siehe konvergenz RK.m. Wir beobachten eine Konvergenzordnung von $3.98 \approx 4$.

5. a) Wir haben

$$\begin{aligned}
 -2ty^2 &= -2(t_j + h) (y_j + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + c_4 h^4 + \dots)^2 \\
 &= -2(t_j + h) (y_j^2 + 2c_1 y_j h + (c_1^2 + 2c_2 y_j) h^2 + (2c_1 c_2 + 2c_3 y_j) h^3 + \dots) \\
 &= \underbrace{(-2t_j y_j^2)}_{c_1} + \underbrace{(-2y_j^2 - 4c_1 t_j y_j)}_{2c_2} h + \underbrace{(-4c_1 y_j - 2t_j (c_1^2 + 2c_2 y_j))}_{3c_3} h^2 \\
 &\quad + \underbrace{(-2(c_1^2 + 2c_2 y_j) - 4t_j (c_1 c_2 + c_3 y_j))}_{4c_4} h^3 + \dots
 \end{aligned}$$

Bitte wenden!

$$\begin{aligned}c_1 &= -2t_j y_j^2 \\c_2 &= -y_j^2 - 2c_1 t_j y_j \\c_3 &= \frac{1}{3} (-4c_1 y_j - 2t_j (c_1^2 + 2c_2 y_j)) \\c_4 &= -\left(\frac{c_1^2}{2} + c_2 y_j + t_j (c_1 c_2 + c_3 y_j) \right)\end{aligned}$$

b) Siehe `run_taylorreihenmethode.m` und `taylorreihenmethode.m`.