Dr. R. Käppeli
R.Hohl

Serie 11

1. *Fixpunkte*

Geben Sie alle Fixpunkte der Fixpunktfunktion $\phi(x) = x^3 + 2x^2 - 2$ an.

2. *Fixpunktiteration und Konvergenz*

Wir betrachten das Nullstellenproblem

$$f(x) = xe^x - 1 = 0$$

auf dem Intervall $[0, 1]$ und die Fixpunktiterationen

$$x^{(k+1)} = \phi_i(x^{(k)}) \quad , i = 1, 2, 3$$

mit den folgenden drei Fixpunktfunktionen

- $\phi_1(x) = e^{-x}$
- $\phi_2(x) = \frac{x^2 e^x + 1}{e^x(x+1)}$
- $\phi_3(x) = x + 1 - xe^x$.

a) Zeigen Sie für ϕ_i ($i = 1, 2, 3$), dass das Fixpunktproblem konsistent mit dem Nullstellenproblem ist.

b) Schreiben Sie eine MATLAB Funktion

```
x = fixpunkt(phi,x0,maxitr,atol,rtol)
```

welche eine Fixpunktiteration zu gegebener Fixpunktfunktion `phi` implementiert. Weiter sind `x0` ein Startwert, d.h. $x^{(0)}$, `maxitr` die maximale Anzahl von Iterationen und `atol` und `rtol` gegebene absolute und relative tolerance für das Abbruchkriterium (ABK3) aus der Vorlesung (Kap. 4, Seite 6):

$$\epsilon^{(k)} = |x^{(k)} - x^*| \leq \texttt{atol} + \texttt{rtol}|x^{(k)}|$$

Als Referenzlösung x^* können Sie die letzte Iteration, d.h. wenn das Abbruchkriterium erfüllt ist, des Algorithmus benutzen. Die Funktion soll im Vektor `x` alle Glieder $x^{(k)}$ zurückgeben.

Bitte wenden!

c) Wenden Sie die `fixpunkt.m` Funktion auf die Fixpunktfunktionen ϕ von **a)** an. Benutzen Sie $x_0 = 0$, `maxitr`$= 1000$, `atol=1e-10` und `rtol=1e-8`. Was beobachten Sie?

d) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion, die die Konvergenzordnung p und die Konvergenrate C obiger Fixpunktiteration ϕ_1 und ϕ_2 mit Startwert $x_0 = 1$, `maxitr`$= 1000$, `atol=1e-10` und `rtol=1e-8` berechnet.

Hinweis: Für den Fehler der k-ten Iteration $\epsilon^{(k)} = |x^{(k)} - x^*|$, kann man die Konvergenzordnung und den Konvergenzrate durch

$$p = \frac{\log(\epsilon^{(k+1)}) - \log(\epsilon^{(k)})}{\log(\epsilon^{(k)}) - \log(\epsilon^{(k-1)})}, \qquad C = \frac{\epsilon^{(k)}}{(\epsilon^{(k-1)})^p}$$

bestimmen.

3. *Newton Verfahren in mehreren Dimensionen*

In mehreren Dimensionen ist das Newton Verfahren zur Lösung des Nullstellenproblems $F(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, wie folgt definiert:

Algorithm 1 Newton Method

function NEWTON(x0, F, DF, nMax, ATOL, RTOL)
  Initialisierung: $n = 1$, $x = x0$
  while $n < nMax$ und $\|DF(x)^{-1}F(x)\| > ATOL + RTOL\|x\|$ **do**
    $\Delta x = -DF(x)^{-1}F(x)$
    $x = x + \Delta x$
    $n = n + 1$
  return x

Hier ist `x0` der Startwert, `DF` die Jacobi-Matrix der Funktion `F`, `nMax` die maximale Anzahl von Iterationen und `ATOL` und `RTOL` gegebene absolute und relative Toleranzen für das Abbruchkriterium (ABK3) (aus der Vorlesung).

a) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `newton.m`, die den obigen Algorithmus implementiert.
Hinweis: Sie sollten niemals die Inverse $DF(x)^{-1}$ explizit berechnen. Stattdessen sollten Sie das System $DF(x)\Delta x = -F(x)$ lösen. (Es ist durchaus sinnvoll, sich zu überlegen wieso!)

b) Betrachten Sie die Funktion $F : D = [-1, 2]^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y - 2 \\ ye^x - 2 \end{pmatrix}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Bestimmen Sie mit Ihrer Funktion aus **a)** alle Lösungen des Nullstellenproblems $F(x, y) = 0$.
Hinweis: Die Höhenlinien der Funktions-Komponenten können mit `hoehenlinien.m` gezeichnet werden.

4. *Nullstellensuche mit dem Newton Verfahren*

a) Ergänzen Sie die MATLAB-Funktion `untersucheNewton.m`, die die Nullstelle des Polynoms $p(x) = x^2 - 3x + 2$ sucht. Diese Funktion ruft die Funktion `newton.m` von Aufgabe 3 mit verschiedenen Anfangswerten auf und plottet welche Anfangswerte gegen welche Nullstellen konvergieren. Identifizieren Sie die zwei Konvergenzbereiche des Newton Verfahrens.

b) Ergänzen Sie die MATLAB-Funktion `newtonKonvergenz.m`, in der die Konvergenz der Newtoniterierten gegen die Nullstelle $x = 1$ des Polynoms $p(x) = x^2 - 3x + 2$ untersucht wird.

c) Wiederholen Sie das Experiment `untersucheNewton.m` mit dem Polynom $p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$. Erklären Sie das Verhalten des Newton Verfahrens für Anfangswerte im Bereich $[1.4, 1.6]$.

d) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `newtonKonvergenzFD.m` basierend auf `newtonKonvergenz.m`, in welcher $F'(x)$ durch folgende Finite-Differenzen Approximation

$$F'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ersetzt wird. Wiederholen Sie **c)** mit $h = 10^{-7}$ und 10^{-16}. Was beobachten Sie?

Abgabe: Bis Freitag, den 22.05.2020.