Serie 4

1. *Uneigentliches Integral mit Quadratur*

Wir betrachten das folgende *uneigentliche* Integral

$$I = \int_0^{+\infty} \exp(-x^4)\, dx.$$

Manchmal kann man durch eine geschickte (analytische) Manipulation des Integranden ein *eigentliches* Integral bekommen.

Verwenden Sie die Substitution $x = \tan(s)$ und schreiben Sie I in ein (*eigentliches*) Integral um.

2. *Quadratur für 2D-Integrale, Dreieckige Gebiete*

Gegeben $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und ein dreieckiges Gebiet K mit Ecken $(0,0),\ (a,0),\ (0,b)$. Wir betrachten das Integral der Funktion f über dem Dreieck K

$$I[f] = \int_K f(x,y)\, dK. \tag{1}$$

Um eine Approximation von (1) herzuleiten, transformieren wir das Dreieck K in das Referenzquadrat $\hat{S} = [-1,+1] \times [-1,+1]$ durch

$$x = a \cdot \left(\frac{1+\xi}{2}\right) \cdot \left(\frac{1-\eta}{2}\right), \quad y = b \cdot \frac{1+\eta}{2} \tag{2}$$

wobei $(\xi, \eta) \in \hat{S}$. Die Jacobi-Matrix der Transformation ist gegeben durch

$$J(\xi,\eta) := \frac{d\mathbf{x}}{d\boldsymbol{\xi}}(\xi,\eta) = \begin{bmatrix} a \cdot \frac{1-\eta}{4} & -a \cdot \frac{1+\xi}{4} \\ 0 & b \cdot \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

und ihre Determinante (die sog. Funktionaldeterminante) ist

$$\det(J)(\xi,\eta) = ab \cdot (1-\eta)/8. \tag{4}$$

Bitte wenden!

Mit dieser Transformation kann das Integral wie folgt geschrieben werden

$$\begin{aligned} I[f] = \int_K f(x,y)\,dK &= \int_{\hat{S}} f\left(x(\xi,\eta),\ y(\xi,\eta)\right) \cdot |\det(J)(\xi,\eta)|\,d\hat{S} \\ &= \frac{ab}{8} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f\left(x(\xi,\eta),\ y(\xi,\eta)\right) \cdot (1-\eta)\,d\xi d\eta. \end{aligned} \tag{5}$$

Damit können wir nun eine zweidimensionale Quadraturregel wie in Aufgabe 4, Serie 3 beschrieben verwenden.

Geben Sie die Gewichte und die Knoten der 2D-Gauss-Legendre Quadratur mit $n = 2$ auf dem Dreieck K mit $a = b = 1$ an.

3. *Homogen geladenes Quadrat in kartesischen Koordinaten*

Betrachten Sie ein quadratisches Gebiet in der x-y-Ebene welches eine konstante elektrische Ladungsdichte ϱ_0 aufweist

$$\varrho(x,y) = \begin{cases} \varrho_0, & (x,y) \in [-1,1]^2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das elektrostatische Potential ϕ an einem Punkt (x_p, y_p) ausserhalb des geladenen Quadrats ist dann durch Integration über die geladene Region gegeben

$$\phi(x_p, y_p) = \frac{\varrho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{(x-x_p)^2 + (y-y_p)^2}}\,dx\,dy\,.$$

Der Einfachheit halber setzen wir $\frac{\varrho_0}{4\pi\epsilon_0} = 1$.

Implementieren Sie die zusammengesetzte Trapezregel in zwei Dimensionen und berechnen Sie dann $\phi(x_p, y_p)$ für $x_p = y_p = 2, 10, 20$. Verwenden Sie $N = 128$ Teil-Intervalle für beide Dimensionen und vergleichen Sie Ihre Werte mit den exakten:

$$\begin{aligned} \phi(2,2) &= 1.4493948762686699 \\ \phi(10,10) &= 0.2830800703857426 \\ \phi(20,20) &= 0.1414508706242226. \end{aligned}$$

Hinweis: Verwenden Sie die Templates `potential_Template.m` und `trapez2D_Template.m`.

4. *Qualitatives Kennenlernen adaptiver Quadratur*

In dieser Aufgabe wollen wir uns mit adaptiver Quadratur vertraut machen. Benutzen Sie die MATLAB Funktion `adaptsim.m` um folgende Funktionen Integrale zu berechnen:

Siehe nächstes Blatt!

(i) $\int_{3/2}^{4} f_1(x)dx$ mit $f_1(x) = \frac{1}{2x^3 - x^2}\left(5\sin\left(\frac{20}{x}\right)\right)^2$

(ii) $\int_{3/2}^{4} f_2(x)dx$ mit $f_2(x) = \min\left(f_1(x), \frac{1}{2}\right)$

(iii) $\int_{-5}^{5} f_3(x)dx$ mit $f_3(x) = \frac{1}{1+x^2}$

(iv) $\int_{0}^{1} f_4(x)dx$ mit $f_4(x) = \sqrt{x}$

(v) $\int_{0}^{1} f_5(x)dx$ mit $f_5(x) = \sin(4\pi x)e^{-2x}$

(vi) $\int_{0}^{0.6} f_5(x)dx + \int_{0.6}^{1} f_5(x)dx$

(vii) $\int_{0}^{+\infty} \exp(-x^4)\, dx$ [Verwenden Sie die Substitution aus Aufgabe $(\mathbf{1})$]

Für (i)-(vii) plotten Sie die Funktion und das adaptive Quadratur Gitter. Verwenden Sie als Toleranz `tol=1e-4` und für die maximal Anzahl Verfeinerungen `maxlevel=12`. Was geht schief bei (v) und warum klappt es bei (vi)?

Abgabe: Bis Freitag, den 20.03.2020.
Laden Sie Ihre MATLAB -Programme unter `sam-up.math.ethz.ch` hoch.
Die schriftlichen Ergebnisse sollten Sie separat in den jeweiligen Übungsgruppen abgeben.