

Serie 8

1. Lokaler und globaler Diskretisierungsfehler

Ergänzen Sie das Template `lokGlobFehler_linear.m`, das den lokalen (nach einem Schritt) und globalen Diskretisierungsfehler des Verfahrens aus Serie 7 Aufgabe 2 und der klassischen Runge-Kutta mit dem AWP

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = y(t), \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

untersucht. Was beobachten Sie?

2. Konsistenzordnung

Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des Verfahrens von Heun gegeben durch folgendes Butcher-Tableau:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Hinweis: Studieren Sie Beispiel (16) in der Vorlesung.

3. Autonomisierungsinvariante Runge-Kutta Verfahren

Ein konsistentes Runge-Kutta Verfahren heisst *autonomisierungsinvariant*, wenn für dessen Koeffizienten

$$\sum_{i=1}^s b_i = 1 \quad (\text{konsistent}) \quad \text{und} \quad c_i = \sum_{l=1}^s a_{il} \quad \text{für } i = 1, \dots, s \quad (1)$$

gilt. Diese Eigenschaft stellt sicher, dass man identische Ergebnisse für das autonomisierte ($\dot{y}(t) = f(y(t))$) und das ursprüngliche nicht autonome ($\dot{y}(t) = f(t, y(t))$) AWP erhält.

a) Sind folgende Verfahren autonomisierungsinvariant:

Bitte wenden!

(i) Das klassische Runge-Kutta Verfahren

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

(ii) Die verbesserte Polygonzug-Methode von Euler

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

(iii) Das 2-Stufen Oliver Verfahren

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{3} & \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{3} \\ \frac{5}{9} & \frac{3}{3} \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}$$

(iv) SDIRK Methode dritter Ordnung

$$\begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1 - \gamma & 1 - 2\gamma & \gamma \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \quad \text{wobei} \quad \gamma = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}.$$

b) Wenn ein Verfahren autonomisierungsinvariant ist, reicht es die Konsistenzordnung für autonome AWPe zu bestimmen. Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des Verfahrens von Heun.

Hinweis: Die Rechnung aus Aufgabe 1 sollte sich wesentlich vereinfachen.

4. Konsistenz- und Konvergenz-Ordnung

Es sei das RK-ESV mit dem folgenden Butcher-Schema gegeben:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 2/3 & 2/3 & \\ \hline & 1/4 & 3/4 \end{array}$$

- Schreiben Sie einen Schritt des Verfahrens (in Stufenform).
- Welche Konsistenzordnung hat das Verfahren?
- Was können Sie für die Konvergenzordnung schlussfolgern?

Abgabe: Online bis **Donnerstag** den 30.04.2020.

Geändert am 27.04.2020