Musterlösung Serie 2

Jordansche Normalform

Bemerkung: Die Studierenden sind gebeten, sich den Satz über die Jordansche Normalform (Fischer 4.6.7), der wegen des Vorlesungsausfalls am Freitag nicht behandelt werden konnte, schonmal selbstständig im Fischer anzuschauen.

1. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform über $\mathbb{C}$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Wir berechnen zuerst das charakteristische Polynom mithilfe einer Spaltenentwicklung nach der ersten Spalte:

$$\begin{aligned}
\det(A - tE_4) &= (-1)^4 \begin{vmatrix} t+1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & t & -1 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 2 & 0 & -1 & t-1 \end{vmatrix} \\
&= (t+1) \cdot \begin{vmatrix} t & -1 & 0 \\ 1 & t & 0 \\ 0 & -1 & t-1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ t & -1 & 0 \\ 1 & t & 0 \end{vmatrix} \\
&= (t+1)(t^2(t-1) + t - 1) - 2(-t^2 - 1) \\
&= t^4 + 2t^2 + 1 = (t^2+1)^2
\end{aligned}$$

Also ist das charakteristische Polynom $P_A(t) = (t^2+1)^2$. Die Nullstellen über $\mathbb{C}$ sind i und $-i$, jeweils mit algebraischer Vielfachheit 2. Wir bestimmen jeweils eine Basis des zugehörigen Hauptraums:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Eig}(A, i) = \mathrm{Ker}(A - iE_4) \quad &= \mathrm{span}(1-i, 0, 0, 2)^T\,, \\
\mathrm{Hau}(A, i) = \mathrm{Ker}(A - iE_4)^2 \quad &= \mathrm{span}(1-i, 0, 0, 2)^T, (3+i, -4i, 4, 0)^T\,, \\
\mathrm{Eig}(A, -i) = \mathrm{Ker}(A + iE_4) \quad &= \mathrm{span}(1+i, 0, 0, 2)^T\,, \\
\mathrm{Hau}(A, -i) = \mathrm{Ker}(A + iE_4)^2 \quad &= \mathrm{span}(1+i, 0, 0, 2)^T, (3-i, 4i, 4, 0)^T\,.
\end{aligned}$$

Die geometrische Vielfachheit (=Dimension des Eigenraums) ist jeweils 1; somit ist A nicht diagonalisierbar und die Jordansche Normalform ist

$$\begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

2. Sei B eine komplexe 5×5-Matrix mit charakteristischem Polynom $-(t-3)^2(t+5)^3$ und Minimalpolynom $(t-3)(t+5)^2$.

   Bestimmen Sie die möglichen Jordanschen Normalformen von B.

   Lösung:

   Da B das charakteristische Polynom $-(t-3)^2(t+5)^3$ besitzt, hat der Eigenwert 3 algebraische Vielfachheit 2 und der Eigenwert -5 algebraische Vielfachheit 3.

   Der Faktor $(t-3)$ tritt im Minimalpolynom mit der Potenz 1 auf; der größte Jordan-Block zum Eigenwert 3 ist also ein 1×1-Block und folglich besitzt der Eigenwert 3 auch geometrische Vielfachheit 2.

   Der Faktor $(t+5)$ tritt im Minimalpolynom mit der Potenz 2 auf; es existiert also ein Jordanblock zum Eigenwert -5 der Grösse 2×2. Aus Dimensionsgründen folgt, dass es genau einen weiteren Jordanblock der Größe 1×1 gibt.

   Für die Jordansche Normalform der Matrix B erhalten wir also bis auf Vertauschen der Jordanblöcke als einzige Möglichkeit

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

3. Sei $A \in \mathrm{M}(3 \times 3, \mathbb{R})$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix S, so dass $A = S(D+N)S^{-1}$, wobei D Diagonalmatrix, N nilpotent und $DN = ND$ ist. Berechnen Sie anschließend A^{20} (ohne Hilfe eines Computers).

   Lösung:

   Das charakteristische Poylnom von A berechnet sich als

$$P_A(t) = -(t-2)^3.$$

Somit ist A trigonalisierbar. Da $\dim \mathrm{Ker}(A - 2E_3) = 1 < 3$ ist A nicht diagonalisierbar. Die Matrix $N = A - 2E_3$ ist nilpotent mit $N^3 = 0$. Der Hauptraum zum Eigenwert 2 ist $\mathbb{R}^3$. Wir können also $S = E_3$ und $D = 2E_3$ wählen. Folglich ist $DN = ND = 2N$. Potenzen von A lassen sich nun leicht mittels Binomischem Lehrsatz (für kommutierende Matrizen) berechnen

Bemerkung: Der Binomische Lehrsatz für kommutierende Matrizen darf hier vorausgesetzt werden. Er lässt sich natürlich ganz parallel zum klassichen binomischen Lehrsatz per Induktion beweisen.

$$\begin{aligned}
A^{20} &= \sum_{i=0}^{20} \binom{20}{i} D^{20-i} N^i \\
&= D^{20} + \binom{20}{1} D^{20-1} N + \binom{20}{2} D^{20-2} N^2 \\
&= 2^{20} E_3 + 20 \cdot 2^{19} N + \frac{20 \cdot 19}{2} 2^{18} N^2 \\
&= 2^{20} E_3 + 10 \cdot 2^{20} N + 5 \cdot 19 \cdot 2^{20} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 2^{20} \begin{pmatrix} 11 & 135 & 125 \\ -10 & -114 & -105 \\ 10 & 115 & 106 \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

4. Für eine reelle Matrix $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ definiert man

$$\exp(A) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k .$$

Bemerkung: Es lässt sich zeigen, dass $\exp(A)$ *wohldefiniert ist, d.h. dass der Limes tatsächlich existiert. Sie dürfen dies in den folgenden Teilaufgaben voraussetzen.*

(a) Sei $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ invertierbar. Zeigen Sie:

$$\exp(SAS^{-1}) = S \exp(A) S^{-1} .$$

(b) Sei nun $A \in \mathrm{M}(3 \times 3, \mathbb{R})$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie $\exp(A)$.

Bemerkung: Für kommutierende Matrizen A und B lässt sich außerdem zeigen, dass $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

Lösung:

(a) Für alle k gilt bekanntlich $(SAS^{-1})^k = SA^kS^{-1}$. Daher ist

$$\begin{aligned}
\exp(SAS^{-1}) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(SAS^{-1})^k \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} SA^kS^{-1} \\
&= \lim_{n\to\infty} S\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k\right) S^{-1} \\
&= S\exp(A)S^{-1}\,.
\end{aligned}$$

(b) Wir möchten Teilaufgabe (a) verwenden und versuchen daher, die Matrix A zu diagonalisieren. Das charakteristische Polynom von A ist

$$\begin{aligned}
P_A(t) &= \det \begin{pmatrix} 1-t & -2 & -4 \\ 0 & 1-t & 6 \\ 0 & 3 & 4-t \end{pmatrix} \\
&= (1-t)\cdot((1-t)(4-t)-18) \\
&= (1-t)(t+2)(t-7)\,.
\end{aligned}$$

Die Matrix hat die 3 paarweise verschiedenen Eigenwerte 1, -2 und 7 und ist daher diagonalisierbar. Wir berechnen die Eigenräume:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Eig}(A,\ \ 1) &= \mathrm{Ker}(A-E_3) = \mathrm{span}(1,0,0)^T\,, \\
\mathrm{Eig}(A,-2) &= \mathrm{Ker}(A+2E_3) = \mathrm{span}(0,2,-1)^T\,, \\
\mathrm{Eig}(A,\ \ 7) &= \mathrm{Ker}(A-7E_3) = \mathrm{span}(1,-1,-1)^T\,.
\end{aligned}$$

Die Basiswechselmatrizen sind daher

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Insgesamt finden wir $A = SDS^{-1}$, wobei $D = \mathrm{diag}(1,-2,7)$ Diagonalmatrix ist. Für Diagonalmatrizen $\mathrm{diag}(a_i)$ (d.h. a_i sind die Diagonaleinträge) gilt stets

$$\mathrm{diag}(a_i)^k = \mathrm{diag}(a_i^k)$$

und daher $\exp(\operatorname{diag}(a_i)) = \operatorname{diag}(e^{a_i})$. Unter Verwendung von Teilaufgabe (a) berechnen wir nun

$$\begin{aligned}
\exp(A) &= S \exp(D) S^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & e^7 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3e & e - e^7 & 2e - 2e^7 \\ 0 & 2e^{-2} + e^7 & -2e^{-2} + 2e^7 \\ 0 & -e^{-2} + e^7 & e^{-2} + 2e^7 \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

5. Sei F ein Endomorphismus eines endlich dimensionalen K-Vektorraums V, dessen charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Für jeden Eigenwert λ von F sei d_λ die maximale Größe eines Jordanblocks zu λ. Zeigen Sie, dass für das Minimalpolynom von F gilt:

$$M_F(t) = \prod_\lambda (t - \lambda)^{d_\lambda} .$$

Lösung:

Es sei V_i der Hauptraum zum Eigenwert λ und F_i die Einschränkung von F auf V_i. Wie im Beweis des Satzes zur Jordanschen Normalform gezeigt wurde, hat F_i Minimalpolynom $(t - \lambda)^{d_\lambda}$. Da die Polynome $(t - \lambda)^{d_\lambda}$ für paarweise verschiedene Eigenwerte teilerfremd sind, genügt es also folgendes Lemma zu zeigen:

Lemma 1. *Sei F ein Endomorphismus eines Vektorraums $V \oplus W$, so dass V und W invariant unter F sind. Seien F_V bzw. F_W die jeweiligen Einschränkungen. Dann gilt für das Minimalpolynom von F:*

$$M_F(t) = \operatorname{kgV}(M_{F_V}(t), M_{F_W}(t)) .$$

Beweis. Da die Unterräume V und W invariant unter F sind, gilt für jeden polynomiellen Ausdruck f von F, dass $f(V \oplus W) = f(V) + f(W)$ und $f(V) \cap f(W) = \{0\}$. Falls $f(V \oplus W) = 0$ muss daher $f(V) = 0$ und $f(W) = 0$, daher $M_{F_V} \mid M_F$ und $M_{F_W} \mid M_F$. Andererseits, falls $M_{F_V} \mid f$ und $M_{F_W} \mid f$, dann $f(V \oplus W) = 0$, daher insgesamt $M_F = \operatorname{kgV}(M_{F_V}, M_{F_W})$ □