Musterlösung Serie 3

KANONISCHES SKALARPRODUKT, VEKTORPRODUKT

1. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{F}_3$.

Lösung:

Über $\mathbb{R}$: Das charakteristische Polynom berechnet sich zu $(t-1)^2(4-t)$, und durch Bestimmen der Eigenräume finden wir eine Basis aus Eigenvektoren $(1,1,1)^T$, $(1,-1,0)^T$, $(1,0,-1)^T$ mit den zugehörigen Eigenwerten 4, 1, 1. Die Matrix ist also diagonalisierbar und hat über $\mathbb{R}$ die Jordansche Normalform

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Über $\mathbb{F}_3$ ist das charakteristische Polynom gleich $-(t-1)^3$; somit besitzt A genau einen Hauptraum zum Faktor $t-1$. Wir rechnen

$$A - E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und $(A-E_3)^k = 0$ für $k \geqslant 2$. Aus $\dim \operatorname{Ker}(A-E_3) = 2$ folgt, dass es jeweils einen Jordanblock der Größe 1 und 2 gibt. Somit hat die Matrix A über $\mathbb{F}_3$ die Jordansche Normalform

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Die Spur einer Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$ ist definiert als

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

   (a) Seien $A, B \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

(b) Sei $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ invertierbar. Folgern Sie, dass

$$\mathrm{tr}(SAS^{-1}) = \mathrm{tr}(A)\,.$$

(c) Sei nun A, so dass $\mathrm{tr}(A^k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass A nilpotent ist. *Hinweis: Verwenden Sie die Jordansche Normalform von A.*

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(AB) &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} \\ &\quad + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2} \\ &\quad + \vdots \\ &\quad + a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \cdots + a_{nn}b_{nn}\,.\end{aligned}$$

Wir vertauschen nun die Faktoren in jedem der Summanden und vertauschen Summation ("spaltenweise statt zeilenweise") und erhalten genau $\mathrm{tr}(BA)$.

(b) Aus (a) folgt direkt, dass

$$\mathrm{tr}(SAS^{-1}) = \mathrm{tr}(AS^{-1}S) = \mathrm{tr}(AE_n) = \mathrm{tr}(A)\,.$$

(c) Sei $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, so dass SAS^{-1} die Jordansche Normalform von A ist. Insbesondere ist SAS^{-1} obere Diagonalmartix mit den Eigenwerten λ_i von A als Diagonaleinträgen. Für $k \in \mathbb{N}$ hat die Potenz $(SAS^{-1})^k = SA^kS^{-1}$ dann genau Diagonaleinträge λ_i^k.

Seien nun $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \neq 0$ die von Null verschiedenen, paarweise verschiedenen Eigenwerte von A mit algebraischer Vielfachheit $r_i \geqslant 1$ respektive. Dann folgt aus $\mathrm{tr}(A^k)$ zusammen mit Teilaufgabe (b), dass:

$$\begin{aligned} r_1\lambda_1 + \cdots + r_m\lambda_m &= 0\,, \\ r_1\lambda_1^2 + \cdots + r_m\lambda_m^2 &= 0\,, \\ &\vdots \\ r_1\lambda_1^m + \cdots + r_m\lambda_m^m &= 0\,. \end{aligned}$$

Wir wollen zeigen, dass $m = 0$, d.h. dass A keinen von Null verschiedenen Eigenwert besitzt. Angenommen $m \geqslant 1$. Wir betrachten obige Gleichungen als lineares Gleichungssystem in den Variablen r_i. Die Koeffizientenmatrix ist

$$C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_m \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_m^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^m & \lambda_2^m & \ldots & \lambda_m^m \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen die Determinante von C:

$$\begin{aligned}\det(C) &= \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_m \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{m-1} & \lambda_2^{m-1} & \dots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_m \cdot \prod_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant m} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0 \,,\end{aligned}$$

wobei wir die Formel für die Determinante der Vandermonde-Matrix (Lineare Algebra I, Serie 11, Aufg. 4) verwendet haben. Es folgt, dass obiges Gleichungssystem nur die triviale Lösung $r_1 = \ldots = r_m = 0$ besitzt, ein Widerspruch.

Insgesamt ist 0 der einzige Eigenwert von A; folglich ist A nilpotent.

3. Zeigen Sie folgende Eigenschaften des kanonischen Skalarproduktes auf $\mathbb{R}^n$. Verwenden Sie hierfür lediglich die Eigenschaften 1.-3., Fischer 5.1.1.

   (a) $\langle x+y, x-y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$,

   (b) $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\| \cdot \|y\| \cos\theta$,

   (c) $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\langle x, y\rangle$,

   (d) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

   Lösung:

   (a)

   $$\langle x+y, x-y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, y\rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2 \,.$$

   (b) Die zweite Gleichheit ist die Definition des Winkels θ zwischen x und y. Wir zeigen also die erste Gleichheit:

   $$\begin{aligned}\|x-y\|^2 &= \langle x-y, x-y\rangle = \langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \langle -y, -y\rangle \\ &= \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \,.\end{aligned}$$

   (c) Unter Verwendung von (b) finden wir

   $$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\ &= \|x-y\|^2 + 4\langle x, y\rangle \,.\end{aligned}$$

   (d) Aus (c)+2(b) ergibt sich genau die Behauptung.

4. Das *Kreuzprodukt* oder *Vektorprodukt* ist die Abbildung $\times\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert als

$$x \times y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)\,,$$

wobei $x = (x_1, x_2, x_3)$ und $y = (y_1, y_2, y_3)$. Zeigen Sie für alle x, y, z:

(a) Das Vektorprodukt ist linear in beiden Argumenten,

(b) das Vektorprodukt ist antisymmetrisch: es gilt $x \times y = -y \times x$; insbesondere $x \times x = 0$,

(c) $\langle x, y \times z\rangle = \det(x\, y\, z)$,

(d) $x \times (y \times z) = \langle x, z\rangle y - \langle x, y\rangle z$,

(e) $\|x \times y\| = \|x\| \cdot \|y\| \cdot |\sin\theta|$, mit θ dem Winkel zwischen x und y.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}
x \times (y + \lambda z) &= (x_2(y_3 + \lambda z_3) - x_3(y_2 + \lambda z_2), x_3(y_1 + \lambda z_1) \\
&\quad - x_1(y_3 + \lambda z_3), x_1(y_2 + \lambda z_2) - x_2(y_1 + \lambda z_1)) \\
&= (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1) \\
&\quad + \lambda(x_2z_3 - x_3z_2, x_3z_1 - x_1z_3, x_1z_2 - x_2z_1) \\
&= x \times y + \lambda x \times z\,.
\end{aligned}$$

Analog für die Linearität im ersten Argument. Im Grunde genommen muss hier garnichts gerechnet werden: In der Definition des Vektorproduktes ist jeder Eintrag ein homogener, linearer Ausruck in den Koordinaten beider Vektoren; somit per Konstruktion linear in beiden Argumente.

(b)

$$\begin{aligned}
x \times y &= (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1) \\
&= -(y_2x_3 - y_3x_2, y_3x_1 - y_1x_3, y_1x_2 - y_2x_1) \\
&= -y \times x\,.
\end{aligned}$$

(c) Diese Eigenschaft lässt sich zum Beispiel durch folgende Merkregel für das Vektorprodukt sehen:

$$y \times z = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}\,.$$

Anwenden des kanonischen Skalarproduktes $\langle x, -\rangle$ ergibt genau die Entwicklung nach der ersten Zeilen der Determinante $\det(x\, y\, z)$.

(d) Die Aussage folgt durch direktes Ausrechnen.

(e) Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} .$$

Dann ist

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} \langle x, x\rangle & \langle x, y\rangle \\ \langle y, x\rangle & \langle y, y\rangle \end{pmatrix} .$$

Anwenden der Determinante ergibt

$$\begin{aligned} \|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2 &= \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}^2 \\ &= \|x \times y\|^2 . \end{aligned}$$

Da aber $\cos\theta = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|}$ und $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ folgt die Behauptung.

5. Sei A eine reelle $n \times n$-Matrix.

(a) Kommutiert A im Allgemeinen mit seiner transponierten Matrix A^T?

(b) Wir nehmen an, die Spalten $v_1, \ldots, v_n$ von A bilden eine orthonormale Menge bzgl. des kanonischen Skalarproduktes, d.h. $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$. Bilden die Zeilen von A ebenfalls eine orthonormale Menge?

(c) Sei nun $u_1, \ldots, u_n$ eine orthonormale Menge im $\mathbb{R}^n$ und sei $v \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Weiter sei θ_i der Winkel zwischen v und u_i. Zeigen Sie:

$$\cos^2\theta_1 + \cdots + \cos^2\theta_n = 1 .$$

Lösung:

(a) Nein, nicht unbedingt: Sei beispielsweise

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} ,$$

dann ist

$$AA^T = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = A^T A .$$

(b) Ja. Die Bedingung, dass die Spalten v_i von A orthonormal zueinander sind, ist nach Definition des kanonischen Skalarprodukts äquivalent zu

$$A^T A = E_n .$$

Insbesondere ist A somit invertierbar, mit Inverser $A^{-1} = A^T$. Daher gilt auch

$$AA^T = E_n$$

was bedeutet, dass die Zeilen von A eine orthonormale Menge bilden.

(c) Wir erinnern an die Definition des Winkels θ_i als

$$\cos\theta_i = \frac{\langle v, u_i\rangle}{\|v\| \cdot \|u_i\|} \, .$$

Zunächst zeigen wir, dass $u_1, \dots, u_n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ bilden. Dies folgt direkt aus obiger Beobachtung (Aufgabe 5): Sei A die Matrix mit Spalten u_i, dann ist $A^T A = E_n$ und somit ist A invertierbar, d.h. u_i bilden eine Basis. Sei nun

$$v = a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n \, ,$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$. Für alle i gilt dann

$$\langle v, u_i\rangle = a_1\langle u_1, u_i\rangle + \cdots + a_n\langle u_n, u_i\rangle = a_i \, ,$$

da $\langle u_i, u_i\rangle = 1$ und $\langle u_j, u_i\rangle = 0$ für $j \neq i$. Daher gilt

$$\cos\theta = \frac{a_i}{\|v\|} \, ,$$

und es folgt

$$\begin{aligned} \cos^2\theta_1 + \cdots + \cos^2\theta_n &= \frac{1}{\|v\|^2}(a_1^2 + \cdots + a_n^2) \\ &= \frac{1}{\|v\|^2} \cdot \|v\|^2 = 1 \, . \end{aligned}$$