Musterlösung Serie 4

Bilinear- und Sesquilinearformen

1. Sei V ein endlich dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\, , \rangle$ und $W, W' \subset V$ Untervektorräume. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

   (a) Das orthogonale Komplement $W^\perp \subset V$ ist ein Untervektorraum.

   (b) Es gilt:
   $$(W^\perp)^\perp = W\,.$$
   Achtung: In unendlich dimensionalen Vektorräumen gilt dies im Allgemeinen nicht.

   (c) Es gilt:
   $$(W + W')^\perp = W^\perp \cap (W')^\perp\,, \quad (W \cap W')^\perp = W^\perp + (W')^\perp\,.$$

   Lösung:

   (a) Unter Verwendung der Bilinearität des Skalarprodukts gilt für alle $w \in W$, $u, u' \in W^\perp$, $\lambda \in K$:
   $$\langle u + \lambda u', v\rangle = \langle u, v\rangle + \lambda\langle u', v\rangle = 0\,,$$
   also auch $u + \lambda u' \in W^\perp$.

   (b) Für $w \in W$, $u \in W^\perp$ gilt
   $$\langle w, u\rangle = \overline{\langle u, w\rangle} = 0\,,$$
   somit gilt stets $W \subset (W^\perp)^\perp$. Für V endlich dimensional wissen wir als Korollar des Gram–Schmidt Verfahrens, dass
   $$\dim V = \dim W + \dim W^\perp\,.$$
   Also ist für V endlich dimensional $\dim W = \dim(W^\perp)^\perp$ und aus obiger Inklusion folgt Gleichheit.

   (c) Da $W, W' \subset W + W'$ folgt direkt $(W + W')^\perp \subset W^\perp$ und $(W + W')^\perp \subset W$. Andersherum seien $w \in W$, $w' \in W'$ und $u \in W^\perp \cap W'^\perp$, dann gilt
   $$\langle w + w', u\rangle = \langle w, u\rangle + \langle w', u\rangle = 0\,,$$
   womit die erste Behauptung gezeigt ist. Um die zweite Behauptung zu zeigen, genügt es eine der Inklusionen zu zeigen, da nach Dimensionsformel (zusammen mit erster Behauptung) folgt, dass beide Vektorräume von gleicher Dimension sind. Die Inklusion $(W + W')^\perp \subset W^\perp + W'^\perp$ ist aber klar und somit sind wir fertig.

2. Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ ist durch
$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + a x_1 y_2 + a x_2 y_1 + 7 x_2 y_2$$
ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert?

Lösung:

Man prüft direkt, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$ ist. Wir berechnen, in welchem Fall $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv definit ist: Für ein beliebiges $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ gilt
$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &= x_1^2 + 2a x_1 x_2 + 7 x_2^2 \\ &= x_1^2 + 2a x_1 x_2 + a^2 x_2^2 - a^2 x_2^2 + 7 x_2^2 \\ &= (x_1 + a x_2)^2 + (7 - a^2) x_2^2. \end{aligned}$$
Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv definit, so folgt mit $x = (-a, 1) \neq 0$, dass $7 - a^2 > 0$ gilt; also ist $|a| < \sqrt{7}$. Ist umgekehrt $|a| < \sqrt{7}$, so gilt wegen der obigen Rechnung $\langle x, x \rangle > 0$ für alle $x \neq 0$ und daher ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv definit.

Wir haben gezeigt, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt ist genau dann, wenn $|a| < \sqrt{7}$ gilt.

3. Sei V ein 3-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ und Sesquilinearform s. Wir nehmen an, die Matrix von s bzgl. $\mathcal{B}$ ist
$$M_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & i & -1 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Sei $\mathcal{C} = (v_1 + i v_2, v_2 + v_3, -v_1 + v_2 + v_3)$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}$ eine Basis von V ist und berechnen Sie die Basiswechselmatrizen $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ und $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

   (b) Bestimmen Sie die Matrix von s bzgl. $\mathcal{C}$.

Lösung:

   (a) Wir betrachten die Matrix
$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Die Determinante berechnet sich durch Entwicklung nach der ersten Spalte als
$$\det M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = 0 - i \cdot 1 = -i\,.$$

Insbesondere ist $\mathcal{C}$ eine Basis, obige Matrix ist die Basiswechselmatrix von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{B}$ und die inverse Matrix

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -i & i \\ 1 & i & 1-i \\ -1 & -i & i \end{pmatrix}$$

ist die Basiswechselmatrizen von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$.

(b) Wir erhalten die Matrix von s bzgl. der Basis $\mathcal{C}$ als

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{C}}(s) &= \left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)^T M_{\mathcal{B}}(s) \overline{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}} \\ &= \begin{pmatrix} 1+i & -2-i & -3-i \\ 2 & 2i & 2i \\ 1 & 1+2i & 2+2i \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

4. Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{R}[t]$ aller Polynome über $\mathbb{R}$ und den Untervektorraum V aufgespannt durch $1, t, t^2, t^3$. Zeigen Sie:

(a) Für Polynome $f, g \in \mathbb{R}[t]$ ist durch

$$s(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t) \cdot g(t) dt$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}[t]$ definiert.

(b) Bestimmen Sie die Matrix der Einschränkung von s auf V bzgl. der Basis $(1, t, t^2, t^3)$.

(c) Bestimmen Sie eine ONB von V durch Anwenden des Gram-Schmidt Verfahrens auf die Basis $(1, t, t^2, t^3)$.

(d) *Seien $p_0, p_1, p_2, \ldots$ die durch Anwenden des Gram–Schmidt Verfahrens auf die Basis $(1, t, t^2, \ldots)$ von $\mathbb{R}[t]$ gewonnenen Polynome. Zeigen Sie, dass

$$p_n = c_n \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n ,$$

mit Konstanten $0 \neq c_n \in \mathbb{R}$ (Rodrigues Formel).

Bemerkung: Bis auf die Konstanten sind die so gewonnenen Polynome die Legendre Polynome, die in der MMP I Vorlesung noch eine wichtige Rolle spielen werden.

Lösung:

(a) Bilinearität in beiden Argumenten rechnet man sofort nach. Wir zeigen, dass s positiv definit ist. Sei $0 \neq f \in \mathbb{R}[t]$. Da f nur endlich viele Nullstellen hat und stetig ist, gibt es insbesondere ein Intervall $I \subset [-1, 1]$ von positiver Länge d und ein $\varepsilon > 0$ mit $|f(x)| \geqslant \varepsilon$ für alle $x \in I$. Daher ist

$$s(f,f) = \int_{-1}^{1} f(t)^2 dt \geqslant d \cdot \varepsilon^2 > 0 .$$

(b) Man berechnet direkt:

$$s(1,1) = 2\,, s(1,t) = 0\,, s(1,t^2) = 0\,, s(1,t^3) = 0\,, s(t,t) = \frac{2}{3}\,, s(t,t^2) = 0\,,$$
$$s(t,t^3) = \frac{2}{5}\,, s(t^2,t^2) = \frac{2}{5}\,, s(t^2,t^3) = 0\,, s(t^3,t^3) = \frac{2}{7}\,.$$

Die Matrix von s bzgl. der $(1,t,t^2,t^3)$ ist daher

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{7}\,. \end{pmatrix}$$

(c) Wir bezeichnen mit p_i die durch Gram–Schmidt gewonnenen Polynome. Da das Integral für ungerade Polynome jeweils verschwindet erhalten wir :

$$\tilde{p}_0 = 1\,,$$
$$p_0 = \frac{\tilde{p}_0}{\|\tilde{p}_0\|} = \sqrt{\frac{1}{2}}\,,$$
$$\tilde{p}_1 = t - s(t,p_0)p_0 = t\,,$$
$$p_1 = \frac{\tilde{p}_1}{\|\tilde{p}_1\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}t\,,$$
$$\tilde{p}_2 = t^2 - s(t^2,p_0)p_0 - s(t^2,p_1)p_1 = t^2 - (\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2}{3}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = t^2 - \frac{1}{3}\,,$$
$$p_2 = \frac{\tilde{p}_2}{\|\tilde{p}_2\|} = \sqrt{\frac{45}{8}} \cdot (t^2 - \frac{1}{3}) = \sqrt{\frac{5}{8}}(3t^2 - 1)\,,$$
$$\tilde{p}_3 = t^3 - s(t^3,p_0)p_0 - s(t^3,p_1)p_1 - s(t^3,p_2)p_2 = t^3 - s(t^3,p_1)p_1 = t^3 - \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{5}\,,$$
$$p_3 = \frac{\tilde{p}_3}{\|\tilde{p}_3\|} = \frac{(t^3 - \frac{3}{5})}{\|\cdots\|} = \sqrt{\frac{7}{8}}(5t^3 - 3t)\,.$$

(d) Die aus dem Gram–Schmidt Verfahren gewonnenen p_n sind bis auf Normierung eindeutig durch die folgenden beiden Eigenschaften charakterisiert:

(i) p_n hat Grad n.

(ii) p_n ist orthogonal zu allen t^k, $k = 0, \ldots, n-1$.

Sei $q_n = c_n \frac{d^n}{dt^n}(t^2 - 1)^n$, dann müssen wir also nur noch prüfen, dass q_n die beiden Bedingungen erfüllt. Es ist klar, dass q_n Grad n hat, als n-fache Ableitng eines Polynoms vom Grad $2n$. Ausserdem gilt für $k < n$ (durch partielle Integration):

$$\begin{aligned} s(t^k, q_n) &= c_n \int_{-1}^{1} t^k \frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n dt \\ &= (-1)^n c_n \int_{-1}^{1} (\frac{d^n}{dt^n} t^k)(t^2-1)^n dt = 0. \end{aligned}$$

Hierbei verschwinden jeweils die Randterme, da alle Ableitungen von $(t^2-1)^n$ bis zur $n-1$-ten in $t = \pm 1$ verschwinden.

5. Benutzen Sie die Cauchy–Schwarz Ungleichung um zu zeigen, dass für positive reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ gilt:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + ... + a_n)^2}{b_1 + ... + b_n}.$$

Lösung:

Die Ungleichung ist auch bekannt als *Titu's Lemma*. Wir beweisen Sie für alle Tupel positiver reeller Zahlen durch die Substitution $a_i = \frac{x_i}{\sqrt{yi}}$, $b_i = \sqrt{y_i}$. Cauchy–Schwarz angewandt auf $(x_1, \ldots, x_n)$ und $(y_1, \ldots, y_n)$ ergibt dann:

$$\begin{aligned} (x_1 + \cdots + x_n)^2 &= \langle x, y \rangle^2 \\ &\leqslant \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \\ &= (\frac{x_1^2}{y_1} + \cdots + \frac{x_n^2}{y_n}) \cdot (y_1 + \cdots + y_n). \end{aligned}$$

Division durch $(y_1 + \cdots + y_n)$ zeigt die Behauptung.