Musterlösung Serie 5

Orthogonale und unitäre Endomorphismen

1. Sei V ein endlich dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\, ,\, \rangle$ und $W \subset V$ ein Untervektorraum. Weiter sei $(w_1, \ldots, w_m)$ eine ONB von W. Definiere den *orthogonalen Projektor* $P\colon V \to V$ auf W durch

$$Pv = \langle v, w_1 \rangle w_1 + \cdots + \langle v, w_m \rangle w_m \,.$$

Zeigen Sie folgende Eigenschaften für alle $u, v \in V$:

(i) $P^2 = P$,

(ii) $\mathrm{Im}(P) = W$,

(iii) $\langle u, Pv \rangle = \langle Pu, v \rangle$,

(iv) für $v \in V$ ist $Pv \in W$ und $v - Pv \in W^\perp$,

(v) Pv ist der Punkt in W, der kleinsten Abstand zu v hat.

Lösung:

(i) Da w_i eine ONB bilden folgt $\langle Pv, w_i \rangle = \langle v, w_i \rangle$ und somit

$$\begin{aligned} P^2 v &= \langle Pv, w_1 \rangle w_1 + \cdots + \langle Pv, w_m \rangle w_m \\ &= \langle v, w_1 \rangle w_1 + \cdots + \langle v, w_m \rangle w_m = Pv \,. \end{aligned}$$

(ii) Nach Definition von P ist $\mathrm{Im}(P) \subset W$. Andererseits ist $\langle w_i, w_j \rangle = \delta_{ij}$ und daher $Pw_i = w_i$ für alle $i = 1, \ldots, m$, also $W \subset \mathrm{Im}(P)$.

(iii)

$$\begin{aligned} \langle u, Pv \rangle &= \langle v, w_1 \rangle \langle u, w_1 \rangle + \cdots + \langle v, w_m \rangle \langle u, w_m \rangle \\ &= \langle u, w_1 \rangle \langle w_1, v \rangle + \cdots + \langle u, w_m \rangle \langle w_m, u \rangle \\ &= \langle Pu, v \rangle \,. \end{aligned}$$

(iv) Nach Definition von P ist $Pv \in W$. Weiter ist für alle $i = 1, \ldots, m$

$$\langle v - Pv, w_i \rangle = \langle v, w_i \rangle - \langle v, w_i \rangle = 0 \,,$$

also $v - Pv \in \mathrm{span}(w_i)^\perp$ und aus Bilinearität folgt $v - Pv \in W^\perp$. Alternativ: Für $w \in W$ ist

$$\langle v - Pv, w \rangle = \langle v - Pv, Pw \rangle = \langle Pv - P^2 v, w \rangle = 0 \,.$$

(v) Für $u \in W$ gilt

$$
\begin{aligned}
\|u-v\|^2 &= \|u\|^2 - 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2 \\
&= \|u\|^2 - 2\langle u, Pv\rangle + \|Pv\|^2 + \|Pv\|^2 - 2\langle v, Pv\rangle + \|v\|^2 \\
&\quad - 2\|Pv\|^2 + 2\langle v, Pv\rangle \\
&= \|u - Pv\|^2 + \|Pv - v\|^2 - 2\|Pv\|^2 + 2\langle v, Pv\rangle \\
&= \|u - Pv\|^2 + \|Pv - v\|^2 \geqslant \|Pv - v\|^2 \,,
\end{aligned}
$$

wobei wir $\langle v, Pv\rangle = \langle v, P^2 v\rangle = \langle Pv, Pv\rangle$, sowie $\langle u, v\rangle = \langle Pu, v\rangle = \langle u, Pv\rangle$ verwenden haben. Es gilt Gleichheit, genau dann wenn $u = Pv$.

2. Ein Unterraum U von $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt sei aufgespannt von den beiden Vektoren $v_1 = (1,1,1)^T$ und $v_2 = (0,2,1)^T$.

   (a) Bestimmen Sie je eine Orthonormalbasis von U und von $U^\perp$.

   (b) Geben Sie die Darstellungsmatrizen der Orthogonalprojektionen

   $$\mathbb{R}^3 \to U \quad \text{und} \quad \mathbb{R}^3 \to U^\perp$$

   an bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und der jeweiligen Basis aus (a).

   Lösung:

   (a) Eine einfache Möglichkeit, die Orthonormalbasen von U und $U^\perp$ gleichzeitig zu bestimmen, ist die Anwendung der Gram-Schmidt-Orthonormalisierung auf die Vektoren v_1, v_2 sowie einen zusätzlichen Vektor $v_3 \in \mathbb{R}^3$, der die beiden zu einer Basis ergänzt, beispielsweise $v_3 = (1,0,0)^T$. Man erhält

   $$w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad w_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

   Die gesuchte Orthonormalbasis für U ist dann w_1, w_2, während w_3 eine Orthonormalbasis von U^T bildet.
   Alternativ ermittelt man zunächst mit Gram-Schmidt die Orthonormalbasis w_1, w_2 von U und löst unabhängig davon das Gleichungssystem

   $$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 2 & 1\end{pmatrix} x = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

   um das orthogonale Komplement von U^T zu bestimmen. Dann führt man auf der erhaltenen Basis von U^T eine weitere Gram-Schmidt-Orthonormalisierung durch.

(b) Die orthogonale Projektion von $\mathbb{R}^3$ auf U ist gegeben durch

$$v \mapsto \langle v, w_1 \rangle w_1 + \langle v, w_2 \rangle w_2.$$

Also ist die darstellende Matrix bezüglich der Standardbasis e_1, e_2, e_3 von $\mathbb{R}^3$ und der Basis w_1, w_2 gleich

$$(\langle e_j, w_i \rangle)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 2 \\ 1 \leqslant j \leqslant 3}} \;=\; (w_1, w_2)^T \;=\; \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Analog erhält man für die Orthogonalprojektion von $\mathbb{R}^3$ auf $U^\perp$ die Matrix

$$w_3^T \;=\; \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

3. Ist V ein euklidischer Vektorraum und F ein Endomorphismus von V, so heißt F *winkeltreu*, falls F injektiv ist und

$$\measuredangle(v, w) = \measuredangle(F(v), F(w)).$$

Hierbei ist der Winkel $\theta = \measuredangle(v, w)$ definiert durch $\cos(\theta) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$.
Zeigen Sie: F ist winkeltreu, genau dann wenn F von der Form λG mit $\lambda \neq 0$ und G orthogonal ist.

Lösung:

Sei $F = \lambda G$. Da G injektiv und $\lambda \neq 0$ ist dann auch F injektiv. Außerdem ist $\|F(v)\| = |\lambda| \|v\|$ und somit F winkeltreu (die Faktoren λ in der Definition des Winkels kürzen sich einfach).

Umgekehrt nehmen wir an, F sei winkeltreu und $\|F(e_i)\| = \lambda_i$, wobei e_i eine ONB ist. Wegen der Injektivität ist $\lambda_i > 0$. Dann folgt aus

$$0 = \frac{\langle e_i + e_j, e_i - e_j \rangle}{\|e_i + e_j\| \cdot \|e_i - e_j\|} = \frac{\langle F(e_i + e_j), F(e_i - e_j) \rangle}{\|F(e_i + e_j)\| \cdot \|F(e_i - e_j)\|},$$

dass also

$$0 = \|F(e_i)\| - \|F(e_j)\| = \lambda_i^2 - \lambda_j^2.$$

Da $\lambda_i > 0, \lambda_j > 0$ ist dann $\lambda_i = \lambda_j = \lambda$. Wir zeigen, dass $G = \frac{1}{\lambda} F$ orthogonal ist. Es genügt zu zeigen, dass die Bilder der e_i wieder eine ONB bilden. Es gilt:

$$\langle G(e_i), G(e_j) \rangle = \|G(e_i)\| \cdot \|G(e_j)\| \cdot \langle e_i, e_j \rangle = \frac{\lambda_i}{\lambda} \frac{\lambda_j}{\lambda} \delta_{ij} = \delta_{ij}.$$

4. Sei $n \geqslant 1$ und sei $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Zeigen Sie, dass die komplexe Matrix

$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \zeta^{(k-1)(\ell-1)} \right)_{1 \leqslant k, \ell \leqslant n}$$

unitär ist.

Lösung: Für alle $a \in \mathbb{Z}$ mit $0 < |a| < n$ gilt

$$\sum_{\ell=1}^{n} \zeta^{a(\ell-1)} = \frac{\zeta^{an}-1}{\zeta^{a}-1} = 0$$

und für $a = 0$ gilt

$$\sum_{\ell=1}^{n} \zeta^{a(\ell-1)} = \sum_{\ell=1}^{n} 1 = n\,.$$

Wir erhalten also

$$\sum_{t=1}^{n} \zeta^{a(t-1)} = n\delta_{a0}$$

für alle $a \in \mathbb{Z}$ mit $|a| < n$.

Mit $A^* = \overline{A^T} = \left(\zeta^{-(m-1)(\ell-1)}/\sqrt{n}\right)_{1\leqslant \ell,m\leqslant n}$ folgt

$$(AA^*)_{km} = \sum_{\ell} \frac{1}{\sqrt{n}}\zeta^{(k-1)(\ell-1)}\frac{1}{\sqrt{n}}\zeta^{-(m-1)(\ell-1)} = \frac{1}{n}\sum_{\ell} \zeta^{(k-m)(\ell-1)} = \delta_{km}$$

für alle k, m, also $AA^* = I_n$.

5. Sei F ein Endomorphismus des euklidischen oder unitären Vektorraums V und $W \subset V$ ein F-invarianter Untervektorraum, also $F(W) \subset W$. Wir betrachten hier zunächst nur endlich dimensionale V.

   (a) Sei F selbstadjungiert. Zeigen Sie, dass dann $W^\perp$ wieder F-invariant ist.

   (b) Sei von nun an F orthogonal bzw. unitär. Zeigen Sie, dass $W^\perp$ nun F^{-1}-invariant ist.

   (c) Zeigen Sie, dass $F|_W$ bijektiv ist, W auch F^{-1}-invariant ist und $W^\perp$ auch F-invariant ist.

   (d) *Betrachten Sie nun den unendlich dimensionalen Raum der komplexen Folgen $a = (\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots)$ mit nur endlich vielen Gliedern $\neq 0$ und Skalarprodukt $\langle a, b\rangle = \sum_j a_j \bar{b}_j$. Sei F die Verschiebung um eine Stelle, also $F(a)_n = a_{n-1}$ und W der Untervektorraum der Folgen, so dass $a_j = 0$ für alle $j < 0$. Zeigen Sie, dass $\langle Fa, Fb\rangle = \langle a, b\rangle$, dass F invertierbar ist, und dass $F(W) \subset W$, also W F-invariant ist. Zeigen Sie, dass dennoch $F|_W$ nicht bijektiv ist und W nicht F^{-1}-invariant ist und $W^\perp$ nicht F-invariant ist.

   Lösung:

   (a) Sei $v \in W^\perp$, $w \in W$ dann ist $F(w) \in W$ und es folgt

   $$\langle F(v), w\rangle = \langle v, F(w)\rangle = 0, .$$

   Hierbei wird die endliche Dimensionalität von V nicht benötigt.

(b) Aus F orthogonal bzw. unitär folgt F invertierbar; für $v \in W^\perp$, $w \in W$ ist dann

$$\langle F^{-1}(v), w\rangle = \langle F^{-1}(v), F^{-1}(F(w))\rangle = \langle v, F(w)\rangle = 0\,.$$

Hierbei wird die endliche Dimensionalität von V nicht direkt benötigt, ausser, dass unendlich dimensionalen unitäre Abbildungen als surjektiv definiert werden müssen, damit Sie bijektiv sind.

(c) Da F invertierbar ist, ist die Einschränkung auf W insbesondere injektiv. Nun ist W endlich dimensional und somit $F|_W$ ein Isomorphismus. Insbesondere $F^{-1}(W) = (F|_W)^{-1}(W) = W$. Aus Teilaufgaben (b) wissen wir, dass $W^\perp$ invariant unter F^{-1} ist. Wenden wir nun die gesamte Aufgabe auf F^{-1} an (F^{-1} ist ebenfalls orthogonal bzw. unitär), dann erhalten wir, dass $W^\perp$ invariant unter $(F^{-1})^{-1} = F$ ist.

(d) Man überzeugt sich leicht, dass $\langle -, -\rangle$ in der Tat ein Skalarprodukt auf V definiert. Offenbar respektiert F den Untervektorraum W, also $F(W) \subset W$. Wir zeigen, dass F das Skalarprodukt erhält: Für $a, b \in V$ gilt

$$\langle F(a), F(b)\rangle = \sum_j a_{j-1}\bar{b}_{j-1} = \sum_j a_j \bar{b}_j = \langle a, b\rangle\,.$$

Es ist weiterhin korrekt, dass die Einschränkung $F|_W$ injektiv ist; sie ist allerdings nicht surjektiv. Sei $a \in V$ definiert durch $a_j = \delta_{0j}$. Dann ist $a \in W$ aber sicherlich $a \notin F(W)$, da für alle $b \in W$ stets $F(b)_0 = b_{-1} = 0$. Das orthogonale Komplement $W^\perp$ besteht aus den Folgen b mit $b_n = 0$ für $n \geqslant 0$. Dies ist offensichtlich kein F-invarianter Untervektorraum: Sei z.B. b definiert durch $b_j = \delta_{(-1)j}$. Dann ist $F(b) = a$, aber $a \notin W^\perp$.

Die inverse Abbildung F^{-1} ist die Verschiebung nach links, also $F^{-1}(a)_n = a_{n+1}$. Da $F^{-1}a = b$ ist, ist W nicht F^{-1}-invariant.