Musterlösung Serie 6

Hauptachsentransformation, positive Definitheit

1. Gegeben sei die hermitesche Matrix $A \in \mathrm{M}(3 \times 3, \mathbb{C})$ definiert als

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ -i & 2 & 0 \\ i & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine unitäre Matrix $P \in U(3)$, so dass $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist.

Lösung:

Wir berechnen zuerst die Eigenwerte von A:

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \begin{vmatrix} 1-X & i & -i \\ -i & 2-X & 0 \\ i & 0 & 2-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X)(2-X)^2 - 2(2-x) \\ &= (2-X)(2-3X+X^2-2) \\ &= X(2-X)(X-3). \end{aligned}$$

Also gibt es eine unitäre Matrix $P \in U(3)$, sodass $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(0,2,3)$. Insbesondere gibt es eine ONB (bezüglich dem Standardskalarprodukt) aus Eigenvektoren von A. Diese Basisvektoren werden wir nun berechnen:

Aus dem Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ -i & 2 & 0 \\ i & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow ix_1 = 2x_2 = 2x_3$$

folgt, dass $v_1' = (2i, -1, 1)^T$ eine Basis des Eigenraumes zum Eigenwert 0 ist. Aus dem Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 & i & -i \\ -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ und } x_2 = x_3$$

folgt, dass $v_2' = (0,1,1)^T$ eine Basis des Eigenraumes zum Eigenwert 2 ist. Schlussendlich folgt aus dem Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -2 & i & -i \\ -i & -1 & 0 \\ i & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 i = x_2 = -x_3,$$

dass $v_3' = (i, 1, -1)^T$ eine Basis des Eigenraumes zum Eigenwert 3 ist. Also ist $P = (v_1, v_2, v_3)$, wobei

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{v_1'}{\|v_1'\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} (2i, -1, 1)^T, \\ v_2 &= \frac{v_2'}{\|v_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, 1)^T, \\ v_3 &= \frac{v_3'}{\|v_3'\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} (i, 1, -1)^T \end{aligned}$$

die gesuchte Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^3$ ist, welche aus Eigenvektoren von A besteht.

2. Sei $A \in \mathrm{M}(3 \times 3, \mathbb{R})$ positiv definit und

$$E = \{x^T A x = 1\} \subset \mathbb{R}^3 .$$

Berechnen Sie die kritischen Punkte von $f(x) = \|x\|^2$ auf E. Verwenden Sie hierzu Methoden der Analysis II. Zeigen Sie, dass $f(x)$ auf E beschränkt ist, und die kritischen Werte gerade $\frac{1}{\lambda_j}$ sind, mit λ_j den Eigenwerten von A.
Bemerkung: E ist ein Ellipsoid und $\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}$ sind gerade die Längen der Halbachsen.

Lösung: Zur Berechnung der kritischen Punkte verwenden wir die Methode der Lagrange-Multiplikatoren mit Multiplikator $\frac{1}{\lambda}$. Konkret zeigen wir: Die kritischen Punkte $x \in E$ von f sind genau die Eigenvektoren von A, die in E liegen. Seien hierzu a_{ij} die Einträge von A. Zunächst bemerken wir, dass f auf E beschränkt ist, da E kompakt ist (siehe auch Bemerkung unten). Die kritischen Punkte erhalten wir durch Lösen des folgenden Systems:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\Big(\|x\|^2 - \lambda(x^T A x - 1)\Big) = 0\,, & i = 1,2,3\,, \\ x^T A x - 1 = 0\,. \end{cases}$$

Wir berechnen die erste Gleichung als

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\|x\|^2 - \frac{1}{\lambda}(x^T A x - 1)\Big) &= 2x_i - \frac{1}{\lambda}\Big(2a_{ii}x_i + \sum_{k \neq i}(a_{ki} + a_{ik}x_i)\Big) \\ &= 2x_i - 2\frac{1}{\lambda}\sum_k a_{ki}x_i\,. \end{aligned}$$

Man beachte, dass $\sum_k a_{ki}x_i$ gerade die i-te Koordinate von Ax ist. Es folgt daher $Ax = \lambda x$. Die zweite Gleichung zeigt:

$$1 = x^T Ax = \lambda x^T x = \lambda \|x\|^2 ,$$

daher ist $\|x\|^2 = \frac{1}{\lambda}$ der zu x gehörende kritische Werte.

Bemerkung: Die normalisierten Eigenvektoren von A bilden die Zeilen einer orthogonalen Matrix S, so dass

$$D_A = S^T AS$$

Diagonalmatrix ist, mit den Eigenwerten λ_j als Diagonaleinträgen. Definieren wir neue Koordinaten y durch $x = Sy$ und setzen $a_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}$ dann ist die Normalform des Ellipsoids gegeben durch

$$E = \{y^T D_A y = 1\} = \{\frac{y_1^2}{a_1^2} + \frac{y_2^2}{a_2^2} + \frac{y_3^2}{a_3^2} = 1\} .$$

Auch die Kompaktheit von E lässt sich so sehen, da S orthogonal, also längenerhaltend ist.

3. Betrachten Sie die reelle symmetrische Matrix

$$G = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Führen Sie für G eine Hauptachsentransformation durch, d.h. finden Sie eine orthogonale Matrix S, so dass $S^T GS$ eine Diagonalmatrix ist.

Hinweis: Alle Eigenwerte von G sind ganzzahlig.

Lösung:

Das charakteristische Polynom von G ist

$$P_G(X) = X^4 - 12v^3 + 36X^2 - 32X = X\left(X^3 - 12X^2 + 36X - 32\right) .$$

Aus dieser Faktorisierung ersehen wir, dass G den Eigenwert 0 besitzt und das Produkt der übrigen Eigenwerte gleich 32 ist. Nach dem Hinweis kommen nur Teiler von 32 als weitere Eigenwerte von G in Frage. Durch Testen der Kandidaten $\pm 1, 2, 4, 8, 16, 32$ ergibt sich die Faktorisierung

$$P_G(X) = X(X-2)^2(X-8).$$

Mit Vielfachheiten gerechnet hat G also die Eigenwerte

$$\lambda_1 := 0, \quad \lambda_2 := \lambda_3 := 2, \quad \lambda_4 := 8.$$

Die zugehörigen Eigenvektoren ergeben sich zum Beispiel als

$$v_1 := \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad v_4 := \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

besitzt. Durch Normalisieren der Vektoren v_1 und v_4 und durch Anwenden des Gram-Schmidt-Verfahrens auf v_2 und v_3 erhalten wir die folgende Orthonormalbasis von Eigenvektoren:

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_1 &:= v_1/\|v_1\| = v_1/2 \\
\tilde{v}_2 &:= v_2/\|v_2\| = v_2/\sqrt{2} \\
\tilde{v}_3 &:= \frac{v_3 - \langle v_3, v_2/\|v_2\|\rangle}{\|v_3 - \langle v_3, v_2/\|v_2\|\rangle\|} = \frac{v_3}{\|v_3\|} = v_3/\sqrt{2} \\
\tilde{v}_4 &:= v_4/\|v_4\| = v_4/2\,.
\end{aligned}$$

Definieren wir also S als die Matrix mit den Spalten $\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_4$,

$$S := \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/2 \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/\sqrt{2} & -1/2 \\ 1/2 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

so ist S orthogonal mit

$$S^T G S = S^{-1} G S = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&8 \end{pmatrix}.$$

4. Sei A eine reelle symmetrische Matrix mit $A^k = I$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann sogar $A^2 = I$ gilt.

   Lösung: Nach dem Spektralsatz existiert eine invertierbare Matrix U, so dass $U^{-1}AU$ eine Diagonalmatrix ist, sagen wir mit Diagonaleinträgen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Dann ist $U^{-1}A^kU = (U^{-1}AU)^k$ eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k$. Wegen $A^k = I$ folgt daraus $\lambda_i^k = 1$ für alle i. Da λ_i reell ist, impliziert dies $\lambda_i = \pm 1$ und somit $\lambda_i^2 = 1$. Also ist $U^{-1}A^2U = (U^{-1}AU)^2$ die Einheitsmatrix, und folglich auch A^2.

5. Zeigen Sie, dass für eine symmetrische Matrix $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ folgende Eigenschaften äquivalent sind:

   (i) A ist positiv semi-definit, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist $x^T A x \geqslant 0$.

(ii) $A = U^T U$ für eine Matrix $U \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$.

(iii) Alle Eigenwerte von A sind nicht-negativ.

(iv) Alle Hauptminoren von A sind nicht-negativ.

Achtung: Hierbei ist ein Hauptminor die Determinante einer $k \times k$ Teilmatrix von A, die symmetrisch zur Diagonalen von A ist. Im Kriterium zur positiven Definitheit (Fischer 5.7.7) benötigt man nur die führenden Hauptminoren zu betrachten.

Lösung: Wir zeigen $(iii) \implies (ii) \implies (i) \implies (iii)$ und anschließend $(ii) \implies (iv) \implies (iii)$.
$(iii) \implies (ii)$ Wir können A orthogonal diagonalisieren, also $A = S^T DS$, mit S orthogonal und D diagonal, mit Diagonaleinträgen den (nicht-negativen) Eigenwerten von A. Es gibt daher eine Diagonalmatrix C mit $C^2 = D$. Dann ist $U = CS$ eine Matrix mit $A = U^T U$.

$(ii) \implies (i)$ Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist $x^T Ax = (Ux)^T (Ux) \geqslant 0$.

$(i) \implies (iii)$ Für einen Eigenwert λ von A mit Eigenvektor x gilt

$$0 \leqslant x^T Ax = \lambda x^T x \,,$$

woraus $\lambda \geqslant 0$ folgt.

$(ii) \implies (iv)$ Sei B ein Teilmatrix von A, die symmetrisch zur Diagnoalen von A ist. Sei $I \subset \{1, \ldots, n\}$, so dass B aus A durch Entfernen der Spalten und Zeilen in I entsteht. Wir bilden V aus U durch Entfernen der Spalten und Zeilen in I. Dann folgt aus $A = U^T U$ direkt $B = V^T V$.

$(iv) \implies (i)$ Wir zeigen die Behauptungs per Induktion nach n. Angenommen, $\lambda < 0$ sei ein Eigenwert von A. Falls alle übrigen Eigenwerte von A positiv sind, so folgt $\det(A) < 0$, ein Widerspruch. Sei also ein $\mu \leqslant 0$ ein weiterer Eigenwert von A. Wir wählen Eigenvektoren x für λ und y für μ, die o.B.d.A. normiert sind. Dann sind x und y orthogonal (A ist symmetrisch, also selbstadjungiert). Wir wählen $s \in \mathbb{R}$, so dass $w = x + sy$ mindestens eine Koordinate $= 0$ besitzt; sei diese Koordinate die i-te. Wenn nun A' aus A durch Entfernen der i-ten Spalte und Zeile entsteht und w' aus w durch Entfernen der i-ten Koordinate, dann ist

$$(w')^T A' w' = w^T Aw = \lambda + s^2 \mu < 0 \,,$$

also ist A' nicht positiv semi-definit. Da wir die Äquivalenz von (i) und (iii) bereits gezeigt haben hat A' also einen negativen Eigenwert, ein Widerspruch zur Induktionsannahme.

Der Beweis $(iv) \implies (i)$ zeigt, warum es nicht genügt nur die führenden Hauptminoren von A zu betrachten: Die Koordinate i muss natürlich nicht die letzte Koordinate sein. Die Matrix A' ist also nicht unbedingt führender Hauptminor. Einfachstes Beispiel hierfür ist die (nicht positiv semi-definite) Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$